



Нелинейная динамика. 2013. Т. 9. № 4. С. 721–754.  
Полнотекстовая версия в свободном доступе  
<http://nd.ics.org.ru>

УДК: 531.8, 517.925

MSC 2010: 37J60, 37J35, 70E18

## Проблема дрейфа и возвращаемости при качении шара Чаплыгина

А. В. Борисов, А. А. Килин, И. С. Мамаев

В работе исследуется движение точки контакта (абсолютная динамика) в интегрируемой задаче о качении шара Чаплыгина по плоскости. Хотя скорость точки контакта является заданной вектор-функцией от переменных редуцированной системы, применить стандартные методы теории интегрируемых гамильтоновых систем невозможно, вследствие отсутствия подходящего конформно-гамильтонова представления для нередуцированной системы. Для полного анализа мы не только применяем стандартный аналитический подход, восходящий к Болю и Вейлю, но и развиваем топологические методы исследования. С помощью этого, в частности, получены условия ограниченности и неограниченности траекторий точки контакта.

Ключевые слова: неголономная связь, абсолютная динамика, бифуркационная диаграмма, бифуркационный комплекс, дрейф, резонанс, инвариантный тор

Получено 4 октября 2013 года

После доработки 2 декабря 2013 года

Работа выполнена при поддержке гранта Президента РФ поддержки ведущих научных школ НШ-2519.2012.1, РФФИ 13-01-12462-офи\_м «Теория гамильтоновых систем и ее приложения в классической механике и гидродинамике», АВИЦП «Развитие научного потенциала высшей школы» на 2012–2014 годы, 1.1248.2011 «Неголономные динамические системы и проблемы управления», 1.7734.2013 «Разработка неголономных мобильных систем». Работа А. А. Килина поддержана грантом Президента РФ поддержки молодых докторов наук МД-2324.2013.1.

Борисов Алексей Владимирович  
[borisov@rcd.ru](mailto:borisov@rcd.ru)

Килин Александр Александрович  
[aka@rcd.ru](mailto:aka@rcd.ru)

Мамаев Иван Сергеевич  
[mamaev@rcd.ru](mailto:mamaev@rcd.ru)

Институт компьютерных исследований;  
Лаборатория нелинейного анализа и конструирования новых средств передвижения  
Удмуртский государственный университет  
426034, Россия, г. Ижевск, ул. Университетская, д. 1

Институт машиноведения им. А. А. Благонравова РАН  
117334, Россия, г. Москва, ул. Бардина, д. 4

Институт математики и механики УрО РАН  
620990, Россия, г. Екатеринбург, ул. Софьи Ковалевской, д. 16

## Содержание

|  |     |
|--|-----|
| Введение . . . . .   | 722 |
| 1. Уравнения движения . . . . .  | 724 |
| 2. Различные типы траекторий редуцированной системы и скорость точки контакта . . . . .        | 725 |
| 3. Поток на торах и скорость точки контакта в случае общего положения                          | 728 |
| 3.1. Случай $(M, \gamma) = 0$ . . . . .  | 729 |
| 3.2. Случай $(M, \gamma) \neq 0$ ( $M \nparallel \gamma, \omega \nparallel \gamma$ ) . . . . . | 731 |
| 4. Дрейф шара в перпендикулярном моменту направлении . . . . .                                 | 734 |
| 4.1. Область положительно-определенного дрейфа . . . . .                                       | 735 |
| 4.2. Бифуркационный анализ и типы траекторий точки контакта . . . . .                          | 738 |
| 5. Поперечное движение — проблема ограниченности . . . . .                                     | 739 |
| 5.1. Отображение Пуанкаре . . . . .  | 740 |
| 5.2. Поперечное движение для нерезонансных торов . . . . .                                     | 741 |
| 5.3. Поперечное движение в случае резонансных торов . . . . .                                  | 743 |
| 6. Случай динамической симметрии ( $I_1 = I_2$ ) . . . . .                                     | 745 |
| 6.1. Случай $M \nparallel \gamma$ . . . . .  | 746 |
| 6.2. Случай $M \parallel \gamma$ . . . . .   | 747 |
| Приложение . . . . .   | 749 |

## Введение

В данной работе рассматривается поведение точки контакта при движении динамически несимметричного уравновешенного шара по абсолютно шероховатой плоскости. Впервые эта неголономная система рассматривалась С. А. Чаплыгиным [21], который вывел уравнения движения, свел задачу к квадратурам, дал геометрический анализ движения и высказал первоначальные соображения относительно движения точки контакта. Методами компьютерного моделирования движение точки контакта было изучено в [32]. Однако, как отметил Дёйстермат [29], подробно анализируя и в некотором смысле переписывая на современном языке работу Чаплыгина [21], утверждения работы [21], касающиеся поведения точки контакта, не являются точными или, по крайней мере, требуют строгого доказательства. Компьютерный анализ [32] также не позволяет сделать заключение о поведении точки контакта в зависимости от начальных условий и значений параметров. Явные квадратуры для точки контакта (которые, кстати, тоже до сих пор не были выполнены в полной мере) также вряд ли позволяют сделать наглядные выводы о движении.

Некоторый прогресс в изучении динамики шара Чаплыгина связан с работой [5]. В ней редуцированные уравнения движения шара (полученные «игнорированием» динамики точки контакта и угла прецессии, соответствующего интегралу площадей) были представлены в гамильтоновой форме после соответствующей замены времени. Такое конформно-гамильтоново представление, казалось бы, должно позволить анализировать как поведение угловых переменных (угла собственного вращения  $\varphi$  и прецессии  $\psi$ ), так и динамику точки контакта, используя методы гамильтоновой механики [14]. Однако, как недавно показано

А. В. Цыгановым [20], абсолютная динамика шара Чаплыгина (то есть нередуцированная система) вряд ли является конформно-гамильтоновой, движение не происходит по лиувилевым торам, что создает дополнительные сложности при исследовании. Различным вопросам, связанным с динамикой шара Чаплыгина, посвящено много современных работ (см., например, [20, 23, 30, 34]).

Для анализа абсолютной динамики (гамильтоновых) уравнений Эйлера – Пуассона в интегрируемых случаях Ковалевской и Горячева – Чаплыгина В. В. Козлов в работах [10, 11] и книге [14] развил результаты Г. Вейля и П. Боля, полученные при исследовании задачи Лагранжа о движении перигелиев планет. Анализ поведения угла прецессии для шара Чаплыгина имеется в недавней работе [16]. Отметим, что эти результаты, как классические, так и современные, носят достаточно фрагментарный характер. При этом несмотря на то, что интегрируемым системам, соответствующим волчку Ковалевской и Горячева – Чаплыгина, посвящено огромное количество аналитических исследований, к сожалению, они носят в основном формальный характер, и о содержательных вопросах абсолютной динамики этих систем, которая только и является наблюдаемой в натурных экспериментах, мы знаем пока очень мало. Для анализа дрейфа и поперечных колебаний в движении шара Чаплыгина мы используем как аналитические<sup>1</sup> методы [14], так и методы топологического анализа интегрируемых систем. Последние были развиты в связи с исследованием устойчивости периодических движений [2].

Отличительной особенностью поведения точки контакта шара Чаплыгина является инфинитный (некомпактный) характер ее движения: оно складывается из регулярного дрейфа (аналогия волнового ухода) в одном направлении и поперечных двухчастотных колебаний, которые могут иметь достаточно большой размах. Такое поведение шара характерно для почти всех начальных условий, в отличие, например, от движения однородного диска по шероховатой плоскости, где для почти всех начальных данных траектория ограничена. Интересно, что поведение точки контакта в шаре Чаплыгина, движущемся по гладкой плоскости, также является ограниченным (в системе координат, связанной с центром масс). В этом смысле шар Чаплыгина на абсолютно шероховатой плоскости можно рассматривать как наиболее предпочтительную модель для создания новых средств передвижения — например, робота-шара (анализ такой системы и литературу см. в [3, 4]).

Мы обсуждаем также физический смысл полученных результатов — как известно [28, 36], в небесной механике вопросы приложимости теоретично-числовых множественных условий, возникающих при анализе малых знаменателей, также вызвали дискуссию в конце XIX и в XX веке. В неголономных системах, связанных с качением тел, многие полученные в работе результаты имеют еще более формальный смысл, чем в небесной механике. Это связано с существенным влиянием сухого трения на движение (см., например, [4]). Отметим, что границы применимости неголономной механики к описанию катящихся тел до сих пор не изучены; кроме того, для разных материалов соприкасающихся тел более подходящей может оказаться другая неголономная модель, в которой запрещается взаимное верчение тел (rubber nonholonomic system) [8].

В связи с этим отметим эксперименты, проведенные Д. К. Бобылевым и Н. Е. Жуковским [1, 9], которые исследовали задачи о движении симметричного шара с гироскопом внутри. Для демонстрации кривых точки контакта, полученных из явных квадратур, шар с гироскопом заставляли катиться по плоскости, посыпанной порошком ликоподия. К сожалению, о результатах этих экспериментов ничего не известно и имеет смысл повторить

<sup>1</sup>Имеются ввиду методы математического анализа и теории рядов.

их с использованием современной измерительной техники. Задача о движении осесимметричного шара Чаплыгина исследована нами в заключение работы. При этом результаты существенно упрощаются и носят более наглядный характер.

Представленная работа может быть полезна, с одной стороны, как модельная задача для изучения абсолютной динамики интегрируемых негамильтоновых динамических систем; с другой стороны, выполненный теоретический и компьютерный анализ траектории точки контакта может быть использован для сравнения с экспериментальными исследованиями, что позволит сделать заключение о возможности применения неголономных моделей для описания катящихся тел. Это направление является сейчас очень актуальным в связи с созданием новых неголономных роботов.

Авторы благодарят А. В. Болсинова, В. В. Козлова, Д. В. Трещева за полезные обсуждения затрагиваемых в работе вопросов и замечания.

## 1. Уравнения движения

Хотя задача о качении шара Чаплыгина рассмотрена во множестве работ, приведем здесь краткое описание уравнений движения и используемых в дальнейшем обозначений.

Пусть динамически несимметричное уравновешенное твердое тело со сферической поверхностью (шар Чаплыгина) катится без проскальзывания по неподвижной горизонтальной плоскости. Выберем подвижную систему координат  $(e_1, e_2, e_3)$ , связанную с главными осями инерции шара, и обозначим массу, тензор инерции и радиус шара через  $m$ ,  $\mathbf{I} = \text{diag}(I_1, I_2, I_3)$ ,  $b$  соответственно. Без ограничения общности далее мы будем считать

$$0 < I_3 < I_2 < I_1 < \mathcal{D}. \quad (1.1)$$

Конфигурационным пространством рассматриваемой системы является многообразие  $SO(3) \times \mathbb{R}^2$ , где первый сомножитель соответствует ориентации шара, а второй задает положение точки контакта. Параметризуем его при помощи пары  $(\mathbf{Q}, \mathbf{r})$ , где

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{pmatrix} \in SO(3)$$

— ортогональная матрица, столбцы которой соответствуют координатам неподвижных ортов, задаваемых в подвижных осях  $(e_1, e_2, e_3)$ , причем вектор  $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$  совпадает с нормалью к плоскости (см. рис. 1),  $\alpha, \beta$  параллельны плоскости, вектор  $\mathbf{r} = (x, y)$  определяет координаты точки контакта в неподвижных осях. (В дальнейшем, если не оговорено иное, все векторы, кроме  $\mathbf{r}$ , предполагаются заданными в неподвижных осях.)

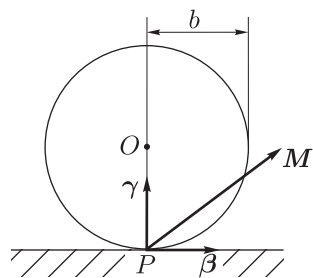


Рис. 1.

Угловой момент шара относительно точки касания  $P$  имеет вид

$$\mathbf{M} = \mathbf{I}\omega + \mathcal{D}\gamma \times (\omega \times \gamma), \quad \mathcal{D} = mb^2, \quad (1.2)$$

где  $\omega$  — угловая скорость шара. Как хорошо известно [21, 29, 32], с помощью этого вектора система уравнений, описывающая эво-

люцию ориентации  $\mathbf{Q}$  и положения  $(x, y)$  шара, после исключения связей может быть представлена в виде

$$\dot{\mathbf{M}} = \mathbf{M} \times \boldsymbol{\omega}, \quad \dot{\boldsymbol{\gamma}} = \boldsymbol{\gamma} \times \boldsymbol{\omega}, \quad \dot{\boldsymbol{\alpha}} = \boldsymbol{\alpha} \times \boldsymbol{\omega}, \quad \dot{\boldsymbol{\beta}} = \boldsymbol{\beta} \times \boldsymbol{\omega}, \quad (1.3)$$

$$\dot{x} = b(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\beta}), \quad \dot{y} = -b(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\alpha}), \quad (1.4)$$

где угловая скорость выражается через момент с помощью соотношения (1.2) по формуле

$$\boldsymbol{\omega} = \mathbf{A}(\mathbf{M} + Z\boldsymbol{\gamma}),$$

$$\mathbf{A} = (\mathbf{I} + \mathcal{D}\mathbf{E})^{-1}, \quad Z = \frac{(\mathbf{A}\mathbf{M}, \boldsymbol{\gamma})}{\mathcal{D}^{-1} - (\boldsymbol{\gamma}, \mathbf{A}\boldsymbol{\gamma})}. \quad (1.5)$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Здесь и всюду в дальнейшем для обозначения векторов используются полужирный курсив  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$ , ..., для матриц — прямой полужирный шрифт  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{Q}$ , .... Скалярное и векторное произведения обозначаются, соответственно,  $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$  и  $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ , и для произвольной функции  $f$  выражение  $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{a}}$  означает вектор с компонентами  $\left(\frac{\partial f}{\partial a_1}, \frac{\partial f}{\partial a_2}, \frac{\partial f}{\partial a_3}\right)$ .

В данном случае уравнения (1.3) для ориентации шара могут быть проинтегрированы отдельно, после чего для заданного закона движения  $\mathbf{Q}(t)$  положение точки касания  $P$  находится при помощи квадратур. Анализ поведения точки контакта в зависимости от эволюции ориентации  $\mathbf{Q}(t)$  и является основной целью данной работы.

ЗАМЕЧАНИЕ. Некоторые качественные свойства вращения шара указаны в работе [16].

## 2. Различные типы траекторий редуцированной системы и скорость точки контакта

Сначала кратко опишем решение подсистемы (1.3), определяющей некоторое векторное поле на шестимерном многообразии  $T SO(3)$ , которое задается условиями ортогональности матрицы  $\mathbf{Q}$ :

$$\boldsymbol{\alpha}^2 = 1, \quad \boldsymbol{\beta}^2 = 1, \quad \boldsymbol{\gamma}^2 = 1, \quad (\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) = (\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma}) = (\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\alpha}) = 0. \quad (2.1)$$

Уравнения (1.3) с физической точки зрения означают, что векторы  $\mathbf{M}$ ,  $\boldsymbol{\alpha}$ ,  $\boldsymbol{\beta}$ ,  $\boldsymbol{\gamma}$  являются постоянными в неподвижной системе координат; следовательно, система (1.3) допускает пять первых интегралов

$$F_1 = (\mathbf{M}, \boldsymbol{\gamma}), \quad F_2 = (\mathbf{M}, \boldsymbol{\alpha}), \quad F_3 = (\mathbf{M}, \boldsymbol{\beta}), \quad F_4 = (\mathbf{M}, \mathbf{M})$$

$$E = \frac{1}{2}(\mathbf{M}, \boldsymbol{\omega}) = \frac{1}{2}(\mathbf{M}, \mathbf{A}\mathbf{M}) + \frac{1}{2}Z(\mathbf{A}\mathbf{M}, \boldsymbol{\gamma}), \quad (2.2)$$

из которых первые четыре очевидно являются зависимыми и с учетом условий (2.1) удовлетворяют тождеству

$$F_4 = F_1^2 + F_2^2 + F_3^2.$$

Кроме того, система обладает аналитической инвариантной мерой

$$(\mathcal{D}^{-1} - (\boldsymbol{\gamma}, \mathbf{A}\boldsymbol{\gamma}))^{-1/2} d\mathbf{M} d\boldsymbol{\alpha} d\boldsymbol{\beta} d\boldsymbol{\gamma}.$$

Зафиксируем значения первых интегралов (2.2) следующим образом:

$$(\mathbf{M}, \boldsymbol{\alpha}) = M_\alpha, \quad (\mathbf{M}, \boldsymbol{\beta}) = M_\beta, \quad (\mathbf{M}, \boldsymbol{\gamma}) = M_\gamma,$$

$$(\mathbf{M}, \mathbf{M}) = \mathcal{C}, \quad 2E = \mathcal{E}.$$

Согласно теореме Эйлера – Якоби [12, 25], эти интегралы определяют слоение фазового пространства  $TSO(3)$  на двумерные торы. Для описания этого слоения воспользуемся бифуркационным анализом приведенной системы, которая описывает эволюцию векторов  $\mathbf{M}$  и  $\gamma$ , и ее фазовое пространство также расслаивается на двумерные торы. Можно показать [3], что перестроение торов как полной, так и приведенной системы происходит при одних и тех же значениях первых интегралов, за исключением случая, когда  $\mathbf{M} \parallel \gamma$  (в этом случае в приведенной системе происходит перестройка, а в полной — нет). Поэтому далее в данной работе для классификации движений мы будем использовать *бифуркационную диаграмму* или *бифуркационный комплекс* [2] приведенной системы, при этом в случае необходимости будем указывать на различие в слоениях полной и приведенной системы. Более подробное описание слоения фазового пространства полной системы и его связь со слоением приведенной системы можно найти в [3].

Бифуркационная диаграмма и бифуркационный комплекс для приведенной системы на плоскости значений первых интегралов

$$\frac{2DE}{(\mathbf{M}, \mathbf{M})} = \frac{D\mathcal{E}}{\mathcal{C}} = h, \quad \frac{(\mathbf{M}, \gamma)}{\sqrt{(\mathbf{M}, \mathbf{M})}} = \frac{M_\gamma}{\sqrt{\mathcal{C}}} = g \quad (2.3)$$

приведены на рис. 2 [3].

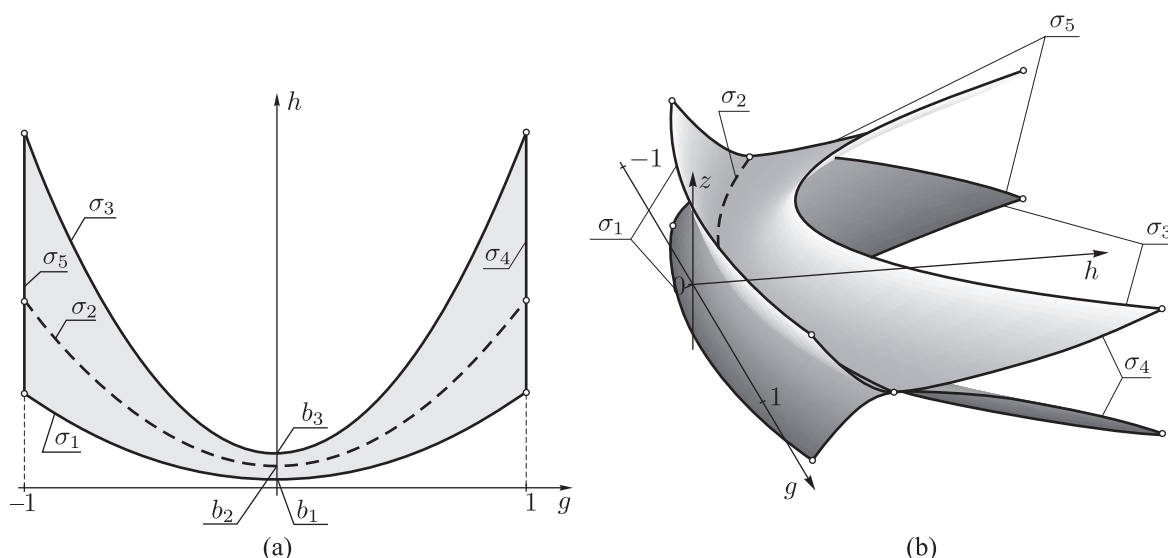


Рис. 2. Бифуркационная диаграмма (а) и бифуркационный комплекс (б) приведенной системы в задаче о шаре Чаплыгина (серым цветом отмечена область возможных значений интегралов).

Напомним, как строится бифуркационный комплекс: всем областям на бифуркационной диаграмме, ограниченным бифуркационными кривыми, ставится в соответствие заданное количество различных листов, равное числу инвариантных многообразий (торов), соответствующих одним и тем же значениям первых интегралов в данных областях; затем эти листы склеиваются по бифуркационным кривым, отвечающим перестройкам данных многообразий (см. подробно [25]). Как правило, комплекс удобно изображать в трехмерном пространстве (см. рис. 2), где одна из осей носит вспомогательный характер.

Преимущество бифуркационного комплекса по сравнению с бифуркационной диаграммой заключается в том, что, во-первых, по комплексу легко судить о том, сколько инвари-

антных торов и периодических решений отвечает различным значениям первых интегралов, и, во-вторых, все устойчивые периодические решения лежат лишь на тех бифуркационных кривых, которые находятся на краях комплекса. (Некоторое неудобство заключается в построении подходящих трехмерных рисунков.)

Соответствующие бифуркационные кривые определяются уравнениями

$$\begin{aligned}\sigma_i: h &= b_i + \frac{b_i^2}{1-b_i}g^2, \quad b_i = \mathcal{D}A_i = \frac{\mathcal{D}}{I_i + \mathcal{D}}, \quad i = 1, 2, 3, \\ \sigma_4: g &= 1, \quad \sigma_5: g = -1.\end{aligned}$$

Как известно, в зависимости от величин первых интегралов  $h, g$  выделяется три случая.

**I. Случай общего положения  $\omega \nparallel e_i, M \nparallel \gamma$ .** Ему соответствуют возможные значения интегралов, не лежащие на бифуркационных кривых (см. рис. 2а). В фазовом пространстве  $TSO(3)$  траектория является обмоткой одного из пары двумерных инвариантных торов, отвечающих данным значениям первых интегралов. Эволюция векторов  $M, \gamma$  определяется приведенной системой

$$\dot{M} = M \times \omega, \quad \dot{\gamma} = \gamma \times \omega. \quad (2.4)$$

Векторы  $\alpha, \beta$  (пользуясь произволом в выборе неподвижных осей) можно выбрать в форме

$$\alpha = \frac{M \times \gamma}{\sqrt{\mathcal{C} - M_\gamma^2}}, \quad \beta = \frac{M - M_\gamma \gamma}{\sqrt{\mathcal{C} - M_\gamma^2}}, \quad (2.5)$$

где  $F_1 = M_\gamma, F_4 = \mathcal{C}$  — значения соответствующих первых интегралов (2.2).

Согласно (1.4) и (2.5), скорость точки контакта определяется следующими уравнениями:

$$\dot{x} = \frac{b}{\sqrt{\mathcal{C} - M_\gamma^2}}(\mathcal{E} - M_\gamma(\omega, \gamma)), \quad \dot{y} = -\frac{b}{\sqrt{\mathcal{C} - M_\gamma^2}}(M \times \gamma, \omega). \quad (2.6)$$

Движение шара в направлении вектора  $\alpha$ , то есть в направлении, перпендикулярном проекции вектора  $M$  на опорную плоскость, назовем *продольным дрейфом*, а в направлении вектора  $\beta$  — *поперечным движением*.

**ЗАМЕЧАНИЕ.** Такой выбор названий обусловлен тем, что при  $M_\gamma = 0$  шар равномерно движется вдоль направления  $\alpha$ , в то время как в поперечном направлении он, как правило, совершает достаточно сложные квазипериодические колебания. При малых величинах  $M_\gamma$  такой характер движения сохраняется, хотя и продольный дрейф становится неравномерным.

**II. Случай  $M \parallel \gamma$  — бифуркационные кривые  $\sigma_4, \sigma_5$ .** В фазовом пространстве приведенной системы данным кривым соответствует пара замкнутых кривых, тогда как в фазовом пространстве  $TSO(3)$  траектория, как и в первом случае, является обмоткой одного из пары двумерных торов и определяется соотношениями

$$\begin{aligned}\dot{\gamma} &= \gamma \times \omega, \quad \dot{\alpha} = \alpha \times \omega, \quad \omega = \sqrt{\mathcal{C}}\mathcal{D}^{-1}(\mathcal{D}^{-1} - (\gamma, A\gamma))^{-1}A\gamma, \\ M &= \sqrt{\mathcal{C}}\gamma, \quad \beta = \gamma \times \alpha.\end{aligned} \quad (2.7)$$



Пользуясь интегралом энергии и соотношением (2.3), в данном случае имеем

$$(\gamma, \mathbf{A}\gamma) = \frac{\mathcal{D}^{-1}h}{1+h} = \text{const},$$

то есть уравнения движения эквивалентны уравнениям случая Эйлера в динамике твердого тела [6].

Для скоростей точки контакта получим:

$$\dot{x} = b\sqrt{C}(1+h)(\mathbf{A}\gamma, \gamma \times \alpha), \quad \dot{y} = -b\sqrt{C}(1+h)(\mathbf{A}\gamma, \alpha). \quad (2.8)$$

**III. Случай  $\omega \parallel e_i \nparallel \gamma$  — бифуркационные кривые  $\sigma_i, i = 1, 2, 3$ .** Траектории в фазовом пространстве  $TSO(3)$ , отвечающие фиксированным значениям интегралов, — пара замкнутых кривых, для которых (см. подробнее [3])

$$\begin{aligned} \mathbf{M} &= M_i e_i + \sqrt{C - M_i^2}(\cos \varphi e_j + \sin \varphi e_k), & \gamma &= \gamma_i e_i + \sqrt{1 - \gamma_i^2}(\cos \varphi e_j + \sin \varphi e_k), \\ \omega &= \Lambda A_i e_i, \end{aligned}$$

где постоянные величины  $M_i, \gamma_i, \Lambda$  выражены через значения первых интегралов:

$$\Lambda = \pm \sqrt{C + \frac{2\mathcal{D}^{-1} - A_i}{\mathcal{D}^{-1} - A_i} M_\gamma^2}, \quad M_i = \Lambda^{-1} \left( C + \frac{A_i}{\mathcal{D}^{-1} - A_i} M_\gamma^2 \right), \quad \gamma_i = \frac{\Lambda^{-1} \mathcal{D}^{-1}}{\mathcal{D}^{-1} - A_i} M_\gamma.$$

Согласно (2.5) и (2.6), скорость точки контакта можно записать в виде

$$\dot{x} = b A_i \sqrt{C - M_\gamma^2}, \quad \dot{y} = 0.$$

Таким образом, для этих периодических (по  $\mathbf{M}, \gamma$ ) решений шар катится по прямой, перпендикулярной плоскости векторов  $\mathbf{M}, \gamma$ , с постоянной скоростью, при этом угловая скорость составляет с вертикалью угол  $\varphi_i = \arccos \gamma_i$  (см. рис. 3).

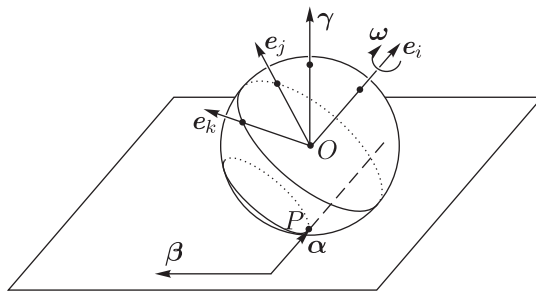


Рис. 3. Качение шара по прямой в случае  $\omega \parallel e_i$ .

### 3. Поток на торах и скорость точки контакта в случае общего положения

При фиксированных значениях первых интегралов (2.2) в случае общего положения векторы  $\mathbf{M}, \omega, \gamma$  и, следовательно, скорости точки контакта (2.6) можно считать функциями, заданными на инвариантных торах приведенной системы. В данном разделе мы



в явном виде вычислим эти функции, а также получим уравнения движения на инвариантных торах. Для этого мы используем одну из модификаций сфероконических координат, являющихся разделяющими переменными для уравнений приведенной системы. Полученные в этом разделе выражения далее будут использованы для исследования поперечного дрейфа в разделе 5.

### 3.1. Случай $(M, \gamma) = 0$

В данном случае для того чтобы вычислить в явном виде скорости  $\dot{x}, \dot{y}$  как функции на инвариантных торах рассматриваемой системы, перепишем соотношение  $M_\gamma = 0$  в форме

$$(M, \gamma) = (I\omega, \gamma) = 0, \quad I = A^{-1} - \mathcal{D}$$

и, пользуясь уравнением  $\dot{\gamma} = \gamma \times \omega$ , выразим угловую скорость  $\omega$  и момент  $M$  через  $\gamma, \dot{\gamma}$ :

$$\begin{aligned} \omega &= \chi \dot{\gamma} \times I\gamma, \quad M = \chi I(\dot{\gamma} \times I\gamma) + \mathcal{D}\dot{\gamma} \times \gamma, \\ \chi^{-1} &= (\gamma, I\gamma). \end{aligned} \quad (3.1)$$

На сфере  $\gamma^2 = 1$  определим сфероконические координаты следующим образом:

$$\gamma_1 = \sin u \sqrt{1 - \frac{a_3 - a_2}{a_3 - a_1} \sin^2 v}, \quad \gamma_2 = \cos u \cos v, \quad \gamma_3 = \sin v \sqrt{1 - \frac{a_2 - a_1}{a_3 - a_1} \sin^2 u}, \quad (3.2)$$

где  $a_k = \frac{\mathcal{D}}{I_k}$ . Возможны два варианта выбора области определения переменных  $u, v$ , для каждого из которых получим полную параметризацию сферы Пуассона:

- либо  $(u, v) \in (-\pi, \pi) \cup (-\pi/2, \pi/2)$ ,
- либо  $(u, v) \in (-\pi/2, \pi/2) \cup (-\pi, \pi)$ .

В дальнейшем в зависимости от значений первых интегралов потребуется использовать обе эти возможности.

Дифференцируя (3.2) по времени и пользуясь (3.1), представим интегралы  $E$  и  $F_4$  как функции координат  $u, v$  и обобщенных скоростей  $\dot{u}, \dot{v}$ :

$$\begin{aligned} 2E &= \mathcal{D}(\alpha \cos^2 u + \cos^2 v) \left( \frac{\mu + \cos^2 v}{(\kappa + \cos^2 v)(1 + \alpha \cos^2 u)} \dot{u}^2 + \frac{\mu - \alpha \cos^2 u}{(\kappa - \alpha \cos^2 u)(\alpha + \cos^2 v)} \dot{v}^2 \right), \\ F_4 &= \mathcal{D}^2(\alpha \cos^2 u + \cos^2 v) \left( \frac{(\mu + \cos^2 v)^2}{(\kappa + \cos^2 v)^2(1 + \alpha \cos^2 u)} \dot{u}^2 + \frac{(\mu - \alpha \cos^2 u)^2}{(\kappa - \alpha \cos^2 u)^2(\alpha + \cos^2 v)} \dot{v}^2 \right), \end{aligned}$$

где

$$\alpha = \frac{a_2 - a_1}{a_3 - a_2}, \quad \kappa = \frac{a_2}{a_3 - a_2}, \quad \mu = \frac{a_2 + 1}{a_3 - a_2}.$$

Отметим, что вследствие принятого соглашения (1.1) в данном случае справедливы неравенства

$$0 < a_1 < a_2 < a_3 < 1, \quad 0 < \alpha < \kappa < \mu, \quad 1 < \mu.$$

Параметризуем совместный уровень этих интегралов двумя параметрами  $\mathcal{E}, \Delta$  следующим образом:

$$2E = \mathcal{E}, \quad F_4 = \mathcal{D}\mathcal{E} \frac{\mu + \Delta}{\kappa + \Delta}, \quad -\alpha < \Delta < 1;$$

тогда уравнения движения для переменных  $u, v$  записываются в виде

$$\begin{aligned} \dot{u}^2 &= \frac{\mathcal{D}^{-1}\mathcal{E}}{(\kappa + \Delta)(\alpha \cos^2 u + \cos^2 v)^2} \frac{(\kappa + \cos^2 v)^2(1 + \alpha \cos^2 u)}{\mu + \cos^2 v} (\alpha \cos^2 u + \Delta), \\ \dot{v}^2 &= \frac{\mathcal{D}^{-1}\mathcal{E}}{(\kappa + \Delta)(\alpha \cos^2 u + \cos^2 v)^2} \frac{(\kappa - \alpha \cos^2 u)^2(\alpha + \cos^2 v)}{\mu - \alpha \cos^2 u} (\cos^2 v - \Delta). \end{aligned} \quad (3.3)$$

На бифуркационной диаграмме (рис. 2а) рассматриваемому случаю соответствует участок прямой  $g = 0$ ,  $h = \frac{\mathcal{D}\mathcal{E}}{c} \in [b_1, b_2]$ , при этом  $\Delta \in [-\alpha, 1]$ . Как видно на бифуркационном комплексе (рис. 2б), каждому значению  $\Delta \neq 0$  соответствует пара изолированных друг от друга инвариантных многообразий системы. Значения  $\Delta \in \{-\alpha, 0, 1\}$  отвечают критическим периодическим решениям системы ( $\Delta = -\alpha$  — вращению вокруг наибольшей оси,  $\Delta = 0$  — вокруг средней,  $\Delta = 1$  — вокруг наименьшей). Остальные значения  $\Delta$  можно разбить на два интервала.

**1)  $\Delta \in (-\alpha, 0)$ .** При этом  $\dot{v}$  — знакоопределена (на одном из двух инвариантных торов  $\dot{v} > 0$ , на втором —  $\dot{v} < 0$ ), поэтому удобно выбрать область определения сфероконических координат как

$$(u, v) \in (-\pi/2, \pi/2) \times (-\pi, \pi).$$

Из (3.3) заключаем, что  $v$  монотонно меняется по  $\bmod 2\pi$  во всем интервале  $(-\pi, \pi)$ , в то время как  $u$  колеблется в полосе  $(-u_*, u_*)$ , где  $u_*$  — корень уравнения

$$\cos^2 u_* = -\frac{\Delta}{\alpha}, \quad u_* \in (0, \pi/2).$$

Характерный вид проекции траектории на плоскость  $\mathbb{R}^2 = \{(u, v)\}$  и сферу Пуассона приведен на рисунке 4.

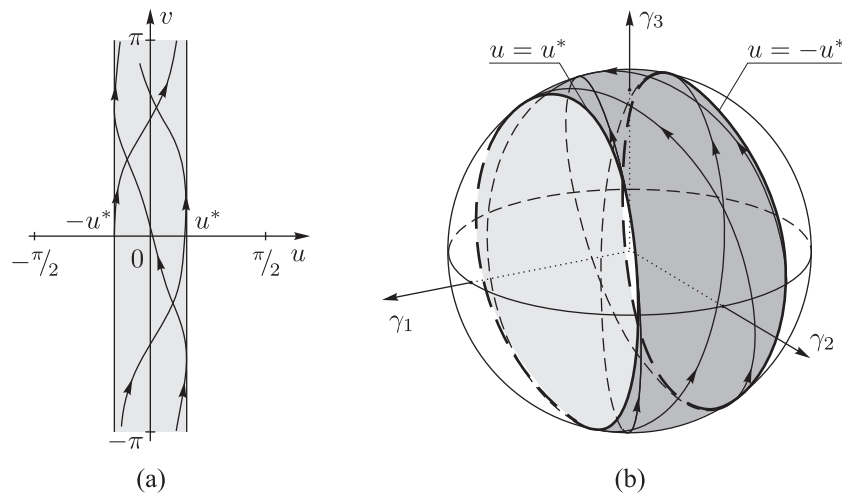


Рис. 4. Характерный вид проекции инвариантного тора и траектории системы на нем при  $\Delta \in (-\alpha, 0)$ : (а) на плоскости  $(u, v)$ , (б) на сфере Пуассона.

**2)  $\Delta \in (0, 1)$ .** В этом случае  $\dot{u}$  знакоопределена (на одном из торов  $\dot{u} > 0$ , на втором —  $\dot{u} < 0$ ); область определения сфероконических координат в этом случае выбираем как

$$(u, v) \in (-\pi, \pi) \times (-\pi/2, \pi/2).$$

В данном случае монотонно меняется  $u$  по  $\bmod 2\pi$  в интервале  $(-\pi, \pi)$ , а  $v$  колеблется в полосе  $(-v_*, v_*)$ , где  $v_*$  — корень уравнения

$$\cos^2 v_* = \Delta, \quad v_* \in (0, \pi/2).$$

Характерные траектории см. на рисунке 5.

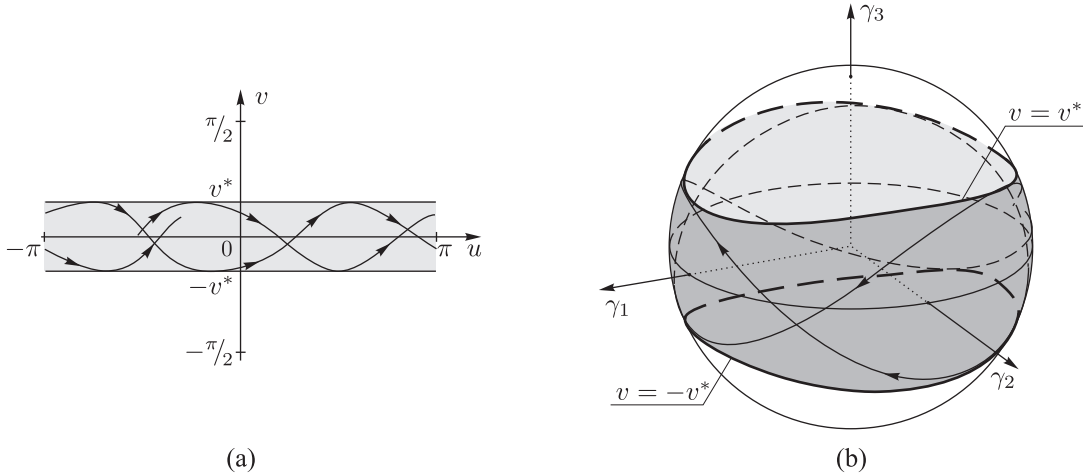


Рис. 5. Характерный вид проекции инвариантного тора и траектории системы на нем при  $\Delta \in (0, 1)$ : (a) на плоскости  $(u, v)$ , (b) на сфере Пуассона.

**Скорость точки контакта.** Согласно (2.6), скорость шара может быть представлена в виде

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \frac{b\mathcal{E}}{\sqrt{\mathcal{C}}} = \text{const}, \\ \dot{y} &= \frac{b(\mu - \kappa)\mathcal{D}}{\sqrt{\mathcal{C}}} \frac{(\alpha \cos^2 u + \cos^2 v)^2 \dot{u} \dot{v}}{(\kappa - \alpha \cos^2 u)(\kappa + \cos^2 v) \sqrt{(1 + \alpha \cos^2 u)(\alpha + \cos^2 v)}}, \end{aligned} \quad (3.4)$$

где  $\dot{u}$ ,  $\dot{v}$  выражаются через  $u$ ,  $v$  из уравнений (3.3), то есть происходит дрейф с постоянной скоростью в направлении  $Ox$  и квазипериодическое движение в направлении  $Oy$  [21].

Плотность инвариантной меры системы (3.3) равна

$$\rho_T = \frac{\alpha \cos^2 u + \cos^2 v}{\sqrt{(1 + \alpha \cos^2 u)(\alpha + \cos^2 v)(\alpha \cos^2 u + \Delta)(\cos^2 v - \Delta)}}.$$

Она имеет особенности на границах ( $u = \pm u^*$  в случае  $\Delta \in (-\alpha, 0)$  и  $v = \pm v^*$  в случае  $\Delta \in (0, 1)$ ).

### 3.2. Случай $(M, \gamma) \neq 0$ ( $M \nparallel \gamma$ , $\omega \nparallel \gamma$ )

Чаплыгиным было предложено преобразование, позволяющее свести этот случай к анализу системы на нулевой константе площадей [21]. Рассмотрим, каким образом при этом скорость точки контакта может быть выражена через локальные координаты на соответствующих инвариантных торах. Приведем без доказательства следующий результат (подробности в современных обозначениях см. в [3]).

Пусть дана система (2.4) с заданными параметрами  $A_i$ ,  $\mathcal{D}$  и фиксированными значениями первых интегралов

$$2E = \mathcal{E}, \quad (\mathbf{M}, \mathbf{M}) = \mathcal{C}, \quad (\mathbf{M}, \boldsymbol{\gamma}) = M_\gamma. \quad (3.5)$$

Зададим линейное преобразование (с коэффициентами, зависящими от значений первых интегралов) векторов  $\mathbf{M}$ ,  $\boldsymbol{\gamma}$  и параметра  $\mathcal{D}$ :

$$\widetilde{\mathbf{M}} = \eta(\cos \theta \mathbf{M} - \sqrt{\mathcal{E}\mathcal{D}} \sin \theta \boldsymbol{\gamma}), \quad \widetilde{\boldsymbol{\gamma}} = \delta(\sin \theta \mathbf{M} + \sqrt{\mathcal{E}\mathcal{D}} \cos \theta \boldsymbol{\gamma}), \quad \widetilde{\mathcal{D}}^{-1} = \mathcal{E}\delta^2, \quad (3.6)$$

где угол  $\theta$  находится из уравнения

$$\operatorname{tg} 2\theta = -\frac{2M_\gamma \sqrt{\mathcal{E}\mathcal{D}}}{\mathcal{C} - \mathcal{E}\mathcal{D}}, \quad (3.7)$$

а величины  $\eta$ ,  $\delta$  определены соотношениями

$$\eta = \sqrt{\widetilde{\mathcal{C}}} \left( \mathcal{C} \cos^2 \theta + \mathcal{E}\mathcal{D} \sin^2 \theta - 2M_\gamma \sqrt{\mathcal{E}\mathcal{D}} \sin \theta \cos \theta \right)^{-1/2},$$

$$\delta = \left( \mathcal{C} \sin^2 \theta + \mathcal{E}\mathcal{D} \cos^2 \theta + 2M_\gamma \sqrt{\mathcal{E}\mathcal{D}} \cos \theta \sin \theta \right)^{-1/2}.$$

Тогда эволюция векторов  $\widetilde{\mathbf{M}}$ ,  $\widetilde{\boldsymbol{\gamma}}$  задается уравнениями

$$\begin{aligned} \dot{\widetilde{\mathbf{M}}} &= \lambda \widetilde{\mathbf{M}} \times \widetilde{\boldsymbol{\omega}}, \quad \dot{\widetilde{\boldsymbol{\gamma}}} = \lambda \widetilde{\boldsymbol{\gamma}} \times \widetilde{\boldsymbol{\omega}}, \\ \widetilde{\boldsymbol{\omega}} &= \mathbf{A}(\widetilde{\mathbf{M}} + \widetilde{Z} \widetilde{\boldsymbol{\gamma}}), \quad \lambda = (\eta \cos \theta + \delta \sin \theta \widetilde{Z})^{-1}, \\ \widetilde{Z} &= \frac{(\mathbf{A} \widetilde{\mathbf{M}}, \widetilde{\boldsymbol{\gamma}})}{\widetilde{\mathcal{D}}^{-1} - (\widetilde{\boldsymbol{\gamma}}, \mathbf{A} \widetilde{\boldsymbol{\gamma}})}, \end{aligned}$$

а постоянные первых интегралов этой системы определяются равенствами

$$(\widetilde{\mathbf{M}}, \widetilde{\boldsymbol{\omega}}) = \widetilde{\mathcal{E}} = \mathcal{E}\eta^2, \quad (\widetilde{\mathbf{M}}, \widetilde{\mathbf{M}}) = \widetilde{\mathcal{C}}, \quad (\widetilde{\mathbf{M}}, \widetilde{\boldsymbol{\gamma}}) = 0. \quad (3.8)$$

Уравнение (3.7) имеет два различных решения, при этом решению, которое при  $g > 0$  и  $\theta \rightarrow 0$  переходит в тождественное преобразование, соответствует интервал  $\theta \in (-\pi/2, 0)$ , следовательно, необходимо выбрать

$$\cos 2\theta = \frac{1-h}{\sqrt{(1-h)^2 + 4g^2h}}, \quad \sin 2\theta = -\frac{2g\sqrt{h}}{\sqrt{(1-h)^2 + 4g^2h}},$$

где, как и выше,  $g = \frac{M_\gamma}{\sqrt{\mathcal{C}}}$ ,  $h = \frac{\mathcal{E}\mathcal{D}}{\mathcal{C}}$ .

Можно показать, что скорость точки контакта (2.6) в новых переменных представляется в форме

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \frac{b\mathcal{E}}{\sqrt{\mathcal{C} - M_\gamma^2}} + \Delta \dot{x}, \quad \Delta \dot{x} = \lambda b M_\gamma \sqrt{\frac{\mathcal{E}}{\mathcal{D}(\mathcal{C} - M_\gamma^2)}} (\eta \sin \theta - \delta \cos \theta \widetilde{Z}), \\ \dot{y} &= -\lambda \frac{b}{\sqrt{\mathcal{C}}} (\widetilde{\mathbf{M}} \times \widetilde{\boldsymbol{\gamma}}, \widetilde{\boldsymbol{\omega}}). \end{aligned} \quad (3.9)$$

Таким образом, векторное поле исходной системы с параметрами  $A_i$ ,  $\mathcal{D}$  на инвариантном торе, заданном соотношениями (3.5), оказывается пропорциональным векторному полю системы с параметрами  $A_i$ ,  $\tilde{\mathcal{D}}$  на инвариантном торе, задаваемом уравнениями (3.8), и, в частности, при нулевой постоянной площадей.

Это позволяет все результаты предыдущего раздела естественным образом перенести на данный случай. Для этого необходимо:

1. при определении сфероконических координат на сфере  $\tilde{\gamma}^2 = 1$  положить  $\tilde{a}_i = \frac{\tilde{\mathcal{D}}}{A_i^{-1} - \tilde{\mathcal{D}}}$  и всюду, где необходимо, поставить волну над соответствующими величинами;
2. выполнить замену времени  $\lambda dt = d\tau$  и поменять  $\dot{u} \rightarrow u'$ ,  $\dot{v} \rightarrow v'$ , где штрих обозначает дифференцирование по  $\tau$ .

Получаем, что эволюция переменных  $u$ ,  $v$  в новом времени на фиксированном уровне интегралов описывается уравнениями

$$\begin{aligned}(u')^2 &= \frac{\tilde{\mathcal{D}}^{-1} \tilde{\mathcal{E}}}{(\tilde{\kappa} + \tilde{\Delta})(\tilde{\alpha} \cos^2 u + \cos^2 v)^2} \frac{(\tilde{\kappa} + \cos^2 v)^2 (1 + \tilde{\alpha} \cos^2 u)}{\tilde{\mu} + \cos^2 v} (\tilde{\alpha} \cos^2 u + \tilde{\Delta}), \\(v')^2 &= \frac{\tilde{\mathcal{D}}^{-1} \tilde{\mathcal{E}}}{(\tilde{\kappa} + \tilde{\Delta})(\tilde{\alpha} \cos^2 u + \cos^2 v)^2} \frac{(\tilde{\kappa} - \tilde{\alpha} \cos^2 u)^2 (\tilde{\alpha} + \cos^2 v)}{\tilde{\mu} - \tilde{\alpha} \cos^2 u} (\cos^2 v - \tilde{\Delta}), \\ \tilde{\alpha} &= \frac{\tilde{a}_2 - \tilde{a}_1}{\tilde{a}_3 - \tilde{a}_2}, \quad \tilde{\kappa} = \frac{\tilde{a}_2}{\tilde{a}_3 - \tilde{a}_2}, \quad \tilde{\mu} = \frac{\tilde{a}_2 + 1}{\tilde{a}_3 - \tilde{a}_2}, \\ (\tilde{M}, \tilde{\omega}) &= \tilde{\mathcal{E}}, \quad (\tilde{M}, \tilde{M}) = \tilde{\mathcal{D}} \tilde{\mathcal{E}} \frac{\tilde{\mu} + \tilde{\Delta}}{\tilde{\kappa} + \tilde{\Delta}}.\end{aligned}\tag{3.10}$$

**Скорость точки контакта.** Согласно (3.9) и (3.4) для точки контакта получим:

$$\begin{aligned}\Delta x' &= b M_\gamma \sqrt{\frac{\mathcal{E}}{\mathcal{D}(\mathcal{C} - M_\gamma^2)}} (\eta \sin \theta - \delta \cos \theta \tilde{Z}), \\ \tilde{Z} = \tilde{\mathcal{D}}(\tilde{\omega}, \tilde{\gamma}) &= \frac{\tilde{\mathcal{D}}}{\sqrt{(1 + \tilde{\alpha} \cos^2 u)(\tilde{\alpha} + \cos^2 v)}} \times \\ &\times \left( \frac{(\tilde{\alpha} + \cos^2 v) \sin v \cos v}{\tilde{\kappa} + \cos^2 v} u' + \frac{(1 + \tilde{\alpha} \cos^2 u) \tilde{\alpha} \sin u \cos u}{\tilde{\kappa} - \tilde{\alpha} \cos^2 u} v' \right), \\ y' &= \frac{b(\tilde{\mu} - \tilde{\kappa}) \tilde{\mathcal{D}}}{\sqrt{\tilde{\mathcal{C}}}} \frac{(\tilde{\alpha} \cos^2 u + \cos^2 v)^2 u' v'}{(\tilde{\kappa} - \tilde{\alpha} \cos^2 u)(\tilde{\kappa} + \cos^2 v) \sqrt{(1 + \tilde{\alpha} \cos^2 u)(\tilde{\alpha} + \cos^2 v)}}.\end{aligned}\tag{3.11}$$

Таким образом, движение шара является квазипериодическим по обеим координатам.

Отметим, что разным значениям интегралов  $h$  и  $g$  преобразование (3.6) ставит в соответствие системы с различными значениями параметров  $\tilde{I}_i$ ,  $\tilde{\mathcal{D}}$ . При этом возникает вопрос о том, каким значениям интегралов соответствует одна и та же физическая система (одни и те же значения  $\tilde{I}_i$ ,  $\tilde{\mathcal{D}}$ ). Так как при преобразовании (3.6) значения  $A_i$  не меняются, то преобразованные системы можно параметризовать единственным параметром, например  $s = \tilde{\mathcal{D}}/\mathcal{D}$ . Таким образом, для ответа на поставленный вопрос достаточно построить линии уровня величины  $s$  как функции первых интегралов исходной системы. При этом точкам одной линии уровня будет соответствовать одна и та же

преобразованная система (с одними и теми же значениями  $\tilde{I}_i, \tilde{\mathcal{D}}$ ). Из (3.6) нетрудно получить явную зависимость  $s$  от значений интегралов  $h$  и  $g$ :

$$s = \frac{1 + h - \sqrt{(1-h)^2 + 4g^2h}}{2h}. \quad (3.12)$$

Соответствующие линии уровня величины  $s(h, g)$ , образующие однопараметрическое семейство кривых на плоскости  $(h, g)$ , изображены на рисунке 6. Каждой кривой семейства соответствует фиксированное значение  $\tilde{\mathcal{D}}$ , а точки на одной кривой отличаются значениями интеграла  $\tilde{h}$ .

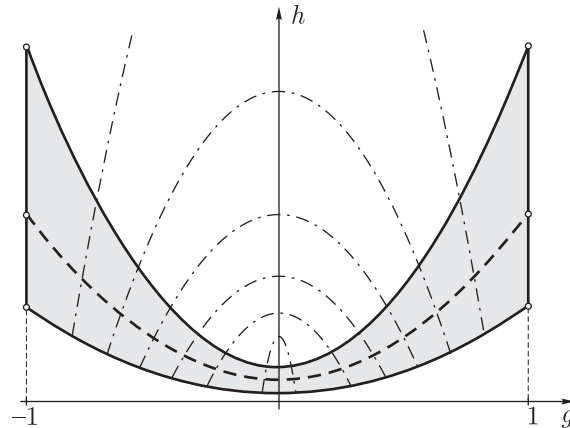


Рис. 6. Семейство кривых (3.12), соответствующих одинаковым параметрам  $\tilde{I}_i, \tilde{\mathcal{D}}$  на плоскости первых интегралов исходной системы

Интересным также является вопрос о физичности параметров системы, которая получается при преобразовании (3.6). Нетрудно показать, что  $0 < s < 1$  при любых значениях  $h$  и  $g$ . Таким образом, выполнено неравенство  $\tilde{\mathcal{D}} < \mathcal{D}$ . Кроме того, используя неравенство треугольника исходных моментов инерции  $I_i < I_j + I_k$ , можно показать, что новые моменты инерции удовлетворяют неравенствам

$$\tilde{I}_i < \tilde{I}_j + \tilde{I}_k - \mathcal{D}(1-s). \quad (3.13)$$

Как видно из (3.13), новые моменты инерции удовлетворяют неравенству даже более строгому, чем неравенство треугольника  $\tilde{I}_i < \tilde{I}_j + \tilde{I}_k$ . Таким образом, замена (3.6) не приводит к рассмотрению систем с нереализуемыми физическими параметрами.

**ЗАМЕЧАНИЕ.** В работе [21] на с. 93 Чаплыгин приводит выражение для скорости точки контакта в случае  $M_\gamma \neq 0$ . Однако при этом допущены несколько неточностей.

В выражении для  $\frac{d\eta}{dt}$  и в формуле (47) необходимо  $\mu\lambda'$  заменить на  $(\mu\lambda' - \lambda\mu')$ . В выражении для  $\frac{d\xi}{dt}$  в правой части равенства величину  $\omega_1$  надо заменить на  $\mathcal{D}_1\omega_1$ . В формуле (47) коэффициент  $2\sigma^2$  следует заменить на  $4\sigma^2$  (это следует из формул (20), (32) и (34)). В последней формуле на странице 93 следует заменить  $\omega_1$  на  $\mathcal{D}_1\omega_1$ , а также поставить знак дифференцирования по  $t$  в левой части уравнения.

#### 4. Дрейф шара в перпендикулярном моменту направлении

Исследуем подробнее вопрос о поступательном перемещении шара в направлении, перпендикулярном плоскости неподвижных векторов  $\mathbf{M}, \boldsymbol{\gamma}$ . Скорость точки контакта, соглас-

но (2.6), определяется соотношением

$$\dot{x} = V_x = \frac{b}{\sqrt{\mathcal{C} - M_\gamma^2}} (\mathcal{E} - M_\gamma(\omega, \gamma)) = \frac{b}{\sqrt{\mathcal{C} - M_\gamma^2}} (\mathcal{E} - \mathcal{D}^{-1} M_\gamma Z). \quad (4.1)$$

При  $M_\gamma = 0$  скорость  $V_x$  в этом направлении является постоянной и положительной. В общем случае, как было показано выше, при фиксированных значениях первых интегралов скорость  $V_x$  является аналитической функцией на двумерном инвариантном торе. Вследствие компактности тора,  $V_x$  принимает на нем конечные минимальное ( $\min V_x$ ) и максимальное ( $\max V_x$ ) значения, и поскольку инвариантный тор определяется величинами первых интегралов,  $\min V_x$  и  $\max V_x$  являются функциями от них.

#### 4.1. Область положительно-определенного дрейфа

Рассмотрим следующую задачу, которую можно решить чисто топологическими методами:

*указать значения первых интегралов системы, для которых функция  $V_x$  на инвариантном торе является положительно определенной.*

Согласно сказанному выше, граница этой области определяется уравнением

$$\min V_x = 0.$$

Зафиксируем значения первых интегралов системы следующим образом:

$$\gamma^2 = 1, \quad M^2 = \mathcal{C}, \quad (M, \gamma) = M_\gamma, \quad 2E = \mathcal{E}. \quad (4.2)$$

Покажем, что для шара Чаплыгина справедлива

**Теорема 1.** Пусть  $M \nparallel \gamma$ ,  $I_3 < I_2 < I_1$ , тогда скорость точки контакта  $V_x$  положительно определена на инвариантном торе, если константы первых интегралов удовлетворяют условиям (см. рис. 7)

$$\frac{M_\gamma^2}{\mathcal{C}} > (I_1 + I_3) \frac{\mathcal{E} M_\gamma^2}{\mathcal{C}^2} - I_1 I_3 \frac{\mathcal{E}^2}{\mathcal{C}^2}, \quad \mathcal{E} \in \left( \frac{M_\gamma^2}{I_1}, \frac{M_\gamma^2}{I_2} \right) \cup \left( \frac{M_\gamma^2}{I_2}, \frac{M_\gamma^2}{I_3} \right). \quad (4.3)$$

*Доказательство.* Из (4.1) следует, что экстремумы функции  $V_x$  на инвариантных торах совпадают с экстремумами функции

$$Z = \frac{(\mathbf{A}M, \gamma)}{\mathcal{D}^{-1} - (\gamma, \mathbf{A}\gamma)}. \quad (4.4)$$

В предыдущем разделе было показано, что при явном ограничении на тор подобные функции — очень громоздкие (особенно при  $M_\gamma \neq 0$ ), поэтому для поиска критических точек функции  $Z$  воспользуемся методом неопределенных множителей и будем искать экстремумы функции

$$\Phi = Z + \lambda_0(\gamma^2 - 1) + \lambda_1(M^2 - \mathcal{C}) + \lambda_2((M, \gamma) - M_\gamma) + \lambda_H \left( E - \frac{1}{2} \mathcal{E} \right), \quad (4.5)$$



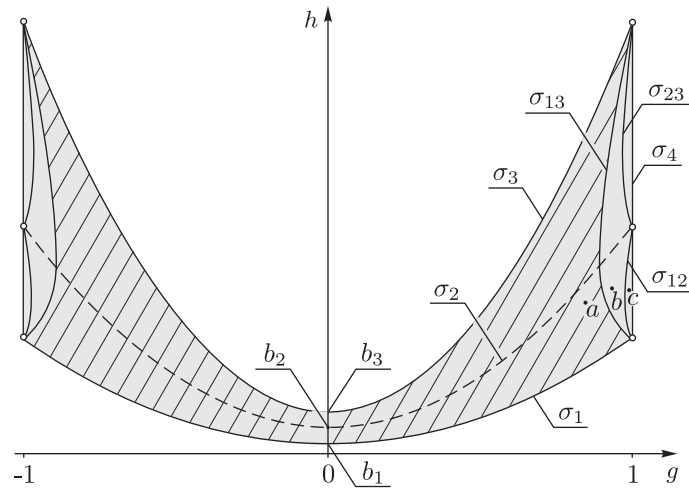


Рис. 7. Область положительно-определенного дрейфа на плоскости первых интегралов (выделена наклонной штриховкой).

где  $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_H$  — неопределенные множители. Продифференцируем эту функцию по  $M$  и  $\gamma$  и учтем, что выполнены равенства

$$\begin{aligned} \frac{\partial Z}{\partial M} &= \frac{1}{X} \mathbf{A} \gamma, & \frac{\partial Z}{\partial \gamma} &= \frac{1}{X} \mathbf{A} (M + 2Z\gamma), \\ \frac{\partial E}{\partial M} &= \omega = \mathbf{A} (M + Z\gamma), & \frac{\partial E}{\partial \gamma} &= \frac{1}{X} \omega = \mathbf{A} (M + Z\gamma), \\ X &= \mathcal{D}^{-1} - (\gamma, \mathbf{A} \gamma), & Y &= (\mathbf{A} M, \gamma); \end{aligned}$$

получим уравнения

$$\begin{aligned} \frac{1}{X} \mathbf{A} \gamma + 2\lambda_1 M + \lambda_2 \gamma + \lambda_H (\mathbf{A} M + Z\gamma) &= 0, \\ \frac{1}{X} \mathbf{A} (M + 2Z\gamma) + 2\lambda_0 \gamma + \lambda_2 M + \frac{\lambda_H}{X} (\mathbf{A} M + Z\gamma) &= 0, \end{aligned} \quad (4.6)$$

которые совместно с уравнениями (4.2) определяют экстремумы функции  $Z$  на инвариантном торе.

Для явного решения этой системы сделаем замену переменных

$$n = Z\gamma \quad (4.7)$$

и неопределенных множителей

$$\lambda_1 \rightarrow \frac{\lambda_1}{X}, \quad \lambda_2 \rightarrow \frac{\lambda_2}{Y}, \quad \lambda_H \rightarrow \frac{\lambda_H}{X}.$$

Используя обозначения

$$\mathbf{B}_i = \begin{pmatrix} \lambda_H A_i + 2\lambda_1 & (1 + \lambda_H) A_i + \lambda_2 \\ (1 + \lambda_H) A_i + \lambda_2 & (2 + \lambda_H) A_i + 2\lambda_0 \end{pmatrix}, \quad \xi_i = (M_i, n_i), \quad i = 1, 2, 3,$$

уравнения (4.6) можно представить в форме системы линейных уравнений

$$\mathbf{B}_1 \xi_1 = \mathbf{B}_2 \xi_2 = \mathbf{B}_3 \xi_3 = 0. \quad (4.8)$$

Вследствие однородности данная система допускает ненулевое решение лишь при условии

$$\det \mathbf{B}_1 \det \mathbf{B}_2 \det \mathbf{B}_3 = 0.$$

Это равенство выполняется в случае, когда один или несколько сомножителей обращаются в нуль. Разберем последовательно возможные варианты.

1.  $\det \mathbf{B}_i = 0$ ,  $\det \mathbf{B}_j \neq 0$ ,  $\det \mathbf{B}_k \neq 0$  (лишь один из сомножителей обращается в нуль), тогда  $M_j = M_k = 0$ ,  $\gamma_j = \gamma_k = 0$ , и, следовательно,  $\mathbf{M} \parallel \boldsymbol{\gamma}$ . Таким образом, решений, удовлетворяющих условиям теоремы, в данном случае не существует.

2.  $\det \mathbf{B}_i = \det \mathbf{B}_j = 0$ ,  $\det \mathbf{B}_k \neq 0$  (пара сомножителей одновременно обращается в нуль), при этом  $M_k = 0$ ,  $\gamma_k = 0$ , и, следовательно, нетривиальные решения определяются ядрами  $(2 \times 2)$ -матриц  $\mathbf{B}_i$  и  $\mathbf{B}_j$ .

Если ядро хотя бы одной из матриц совпадает со всем  $\mathbb{R}^2$ , то оба ее собственных значения равны нулю, что для симметричной матрицы эквивалентно ее тождественному обращению в нуль. Положим для определенности  $\mathbf{B}_i \equiv 0$ , тогда, разрешая эту систему относительно  $\lambda_0$ ,  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$ , после подстановки получим уравнение  $\det \mathbf{B}_j = -(A_i - A_j)^2 = 0$ . Это противоречит условию  $I_i \neq I_j$ ; следовательно, нетривиальные решения возможны лишь при условии  $\mathbf{B}_i \neq 0$ ,  $\mathbf{B}_j \neq 0$ .

Разрешим уравнения  $\det \mathbf{B}_i = \det \mathbf{B}_j = 0$  относительно  $\lambda_1$ ,  $\lambda_H$ , получим

$$\lambda_1 = \frac{1}{4\lambda_0}(\lambda_2^2 - A_i A_j), \quad \lambda_H = 2 \frac{(\lambda_2 - \lambda_0)^2 - (A_i + \lambda_0)(A_j + \lambda_0)}{A_i A_j - (\lambda_2 - 2\lambda_0)^2}. \quad (4.9)$$

При этом решение системы (4.8) имеет вид

$$M_i = \frac{2\lambda_0(A_i + 2\lambda_0 - \lambda_2)}{\lambda_2^2 - 2\lambda_2\lambda_0 - A_i(A_j - 2\lambda_0)} n_i, \quad M_j = \frac{2\lambda_0(A_j + 2\lambda_0 - \lambda_2)}{\lambda_2^2 - 2\lambda_2\lambda_0 - A_j(A_i - 2\lambda_0)} n_j. \quad (4.10)$$

Переобозначая подходящим образом функции от неопределенных множителей, соответствующее решение исходной системы (4.6) представим в форме

$$\begin{aligned} M_i &= (U_k + V_k)\gamma_i, & M_j &= (U_k - V_k)\gamma_j, & M_k &= 0, \\ \gamma_i &= \cos \psi_k, & \gamma_j &= \sin \psi_k, & \gamma_k &= 0, \end{aligned} \quad (4.11)$$

где  $\psi_k$  — угол, параметризующий меридиан в главной плоскости  $O\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j$ .

Кроме того, нужно потребовать, чтобы выполнялись уравнения (4.2) и скорость поступательного движения  $V_x$  для данной критической точки обращалась в нуль; это приводит к уравнениям

$$(\mathbf{M}, \boldsymbol{\gamma}) = M_\gamma, \quad (\mathbf{M}, \mathbf{M}) = \mathcal{C}, \quad (\mathbf{A}\mathbf{M}, \mathbf{M}) + \frac{(\mathbf{A}\mathbf{M}, \boldsymbol{\gamma})^2}{\mathcal{D}^{-1} - (\boldsymbol{\gamma}, \mathbf{A}\boldsymbol{\gamma})} = \mathcal{E}, \quad \mathcal{E} - \frac{M_\gamma \mathcal{D}^{-1}(\mathbf{A}\mathbf{M}, \boldsymbol{\gamma})}{\mathcal{D}^{-1} - (\boldsymbol{\gamma}, \mathbf{A}\boldsymbol{\gamma})} = 0.$$

Разрешая эти уравнения относительно величин  $\psi_k$ ,  $V_k$ , которые будем считать свободными параметрами, получим три семейства решений:

$$\begin{aligned} M_\gamma &= \left( \cos 2\psi_k + \frac{I_i + I_j}{I_i - I_j} \right) V_k, & \mathcal{C} &= \frac{(I_i^2 - I_j^2) \cos 2\psi_k + I_i^2 + I_j^2}{(I_i - I_j)^2} 2V_k^2, \\ \mathcal{E} &= \frac{(I_i - I_j) \cos 2\psi_k + I_i + I_j}{(I_i - I_j)^2} 2V_k^2, & U_k &= \frac{I_i + I_j}{I_i - I_j} V_k. \end{aligned}$$

Исключив отсюда  $\psi_k$  и  $V_k$ , получим в явном виде уравнения поверхностей  $\sigma_{ij}$  в пространстве значений первых интегралов, для которых скорость точки контакта обращается в нуль в одной из точек экстремума на инвариантном торе:

$$\sigma_{ij}: \mathcal{E}^2 I_i I_j - \mathcal{E} M_\gamma^2 (I_i + I_j) + \mathcal{C} M_\gamma^2 = 0, \quad \mathcal{E} \in \left( \frac{c^2}{I_i}, \frac{c^2}{I_j} \right). \quad (4.12)$$

Перепишем это соотношение для констант  $h = \frac{\mathcal{E}\mathcal{D}}{\mathcal{C}}$ ,  $g = \frac{M_\gamma}{\sqrt{\mathcal{C}}}$ , получим

$$\mathcal{D}^{-2}I_i I_j h^2 - \mathcal{D}^{-1}(I_i + I_j)hg^2 + g^2 = 0$$

и изобразим соответствующие кривые на бифуркационной диаграмме (см. рис. 7). Мы видим, что в случае  $I_3 < I_2 < I_1$  кривая  $\sigma_{13}$  расположена ближе всех к оси  $g = 0$ , а значит, на ней прежде всего происходит обращение в нуль скорости  $V_x$ , то есть она соответствует условию  $\min V_x = 0$ . Учитывая область возможного движения на плоскости  $(g, h)$  и исключая решение, соответствующее бифуркационной кривой  $\sigma_2$ , получаем неравенства (4.3).

**ЗАМЕЧАНИЕ.** Положение критических точек функции  $Z$  на инвариантном торе в зависимости от значений первых интегралов можно определить следующим образом. При помощи интегралов  $(M, \gamma) = M_\gamma$  и  $M^2 = \mathcal{C}$  находим

$$U_k = M_\gamma \mp \sqrt{\mathcal{C} - M_\gamma^2} \frac{\cos 2\psi_k}{\sin 2\psi_k}, \quad V_k = \pm \frac{\sqrt{\mathcal{C} - M_\gamma^2}}{\sin 2\psi_k}.$$

Подставляя найденные  $U_k, V_k$  в (4.11) и затем в интеграл энергии (2.2), получим уравнение, определяющее положение  $\psi_k$  критических точек на одной из окружностей в главной плоскости  $Oe_i e_j$ :

$$(h + 2g^2 - 1) \cos 2\psi_k \pm 2g\sqrt{1 - g^2} \sin 2\psi_k + \frac{(I_i + I_j + 2\mathcal{D}^{-1}I_i I_j)h - 2\mathcal{D}g^2 - (I_i + I_j)}{I_i - I_j} = 0,$$

где, как и выше,  $h = \frac{\mathcal{E}\mathcal{D}}{\mathcal{C}}$ ,  $g = \frac{M_\gamma}{\sqrt{\mathcal{C}}}$ .

Для завершения доказательства осталось рассмотреть последний случай

3.  $\det \mathbf{B}_1 = \det \mathbf{B}_2 = \det \mathbf{B}_3 = 0$  (все три множителя одновременно обращаются в нуль). Выражая  $\lambda_1, \lambda_H$  из двух уравнений  $\det \mathbf{B}_i = \det \mathbf{B}_j = 0$  по формулам (4.9) и подставляя получившиеся выражения в третье уравнение, получим

$$\det \mathbf{B}_k = \frac{A_i A_j}{A_k^2} (A_i - A_k)(A_j - A_k).$$

Следовательно, в случае динамически несимметричного шара  $\det \mathbf{B}_k \neq 0$ , поэтому данное условие нереализуемо.

Таким образом, область положительной определенности  $V_x$  определяется только неравенствами (4.3), и для значений интегралов, попадающих в заштрихованную область на рисунке 7, всегда наблюдается уход в направлении  $Ox$ . ■

Анализ дрейфа при других значениях первых интегралов (незаштрихованная область на диаграмме, рис. 7) требует применения аналитического подхода (см. приложение). При этом прежде всего необходимо вычислить среднюю по инвариантному тору скорость дрейфа  $\langle V_x \rangle$ . Компьютерные эксперименты позволяют предположить следующее.

**Гипотеза.** Средняя скорость  $\langle V_x \rangle$  строго положительна при  $M \nparallel \gamma$  и равна нулю при  $M \parallel \gamma$ .

## 4.2. Бифуркационный анализ и типы траекторий точки контакта

На рисунке 8 приведены примеры зависимостей  $V_x(t)$  для начальных условий (из различных областей на рис. 7) и соответствующие им следы точки контакта. Как видно из рисунков, в области между кривыми  $\sigma_{12}, \sigma_{23}$  и  $\sigma_{13}$  одна часть минимумов функции  $V_x(t)$

лежит выше нуля, а другая — ниже нуля. Каждому участку отрицательной скорости соответствует характерная петля на траектории точки контакта. Таким образом, в этой области диаграммы на траектории точки контакта петли появляются только на части максимумов кривой  $y(x)$ . В области между кривыми  $\sigma_{12}$  и  $\sigma_4$  (или  $\sigma_{23}$  и  $\sigma_4$ ) уже все минимумы функции  $V_x(t)$  лежат ниже нуля, и, соответственно, на всех максимумах кривой  $y(x)$  появляются петли. Интересно, что по количеству петель траектории точки контакта можно примерно оценить, к какой области бифуркационной диаграммы относится траектория.

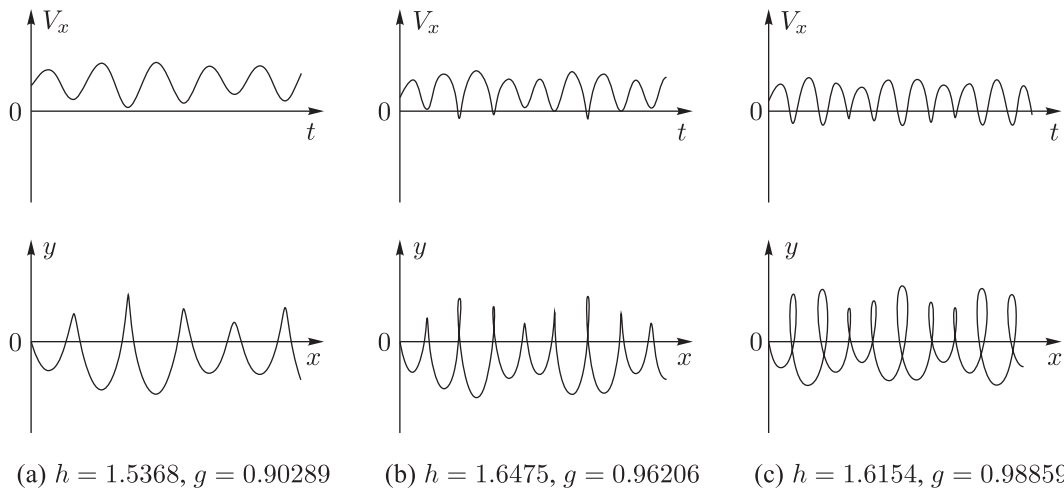


Рис. 8. Зависимости  $V_x(t)$  (сверху) и траектории точки контакта (снизу). Рисунки (а), (b) и (с) отвечают значениям интегралов, соответствующих точкам а, b и с на рисунке 3. Хорошо заметно, что петли на траекториях возникают в моменты, когда величина  $V_x$  становится отрицательной.

## 5. Поперечное движение — проблема ограниченности

Таким образом, мы видим, что если к изучению дрейфа вдоль направления, перпендикулярного плоскости  $(\mathbf{M}, \gamma)$ , можно в той или иной мере применять топологические (грубые) методы, то для анализа движения в перпендикулярном направлении, по-видимому, возможен лишь аналитический подход. Как было показано выше (см. раздел 3), анализ поперечного движения, то есть поведения функции  $y(t)$ , может быть сведен к исследованию интеграла (квадратуры) от некоторой функции.

Итак, для определенности зафиксируем  $M_\gamma = 0$  и выберем семейство торов, которое характеризуется соотношениями

$$0 < \Delta < 1, \quad \dot{u} > 0,$$

тогда после замены времени и переменной  $v$  по формулам

$$d\tau = \Lambda dt, \quad \Lambda^2 = \frac{\mathcal{D}^{-1}\mathcal{E}}{(\kappa + \Delta)(\alpha \cos^2 u + \cos^2 v)^2} \frac{(\kappa - \alpha \cos^2 u)^2 (\kappa + \cos^2 v)^2}{(\mu - \alpha \cos^2 u)(\mu + \cos^2 v)},$$

$$\cos \tilde{v} = \sqrt{\frac{\cos^2 v - \Delta}{1 - \Delta}}, \quad \text{при } \dot{v} > 0, \quad \cos \tilde{v} = -\sqrt{\frac{\cos^2 v - \Delta}{1 - \Delta}}, \quad \text{при } \dot{v} < 0,$$

уравнения движения на торе  $\mathbb{T}^2 = \{(u, \tilde{v}) \bmod 2\pi\}$  принимают вид

$$\begin{aligned}\frac{du}{d\tau} &= \frac{1}{\Phi_u(u)} = \frac{\sqrt{(1 + \alpha \cos^2 u)(\mu - \alpha \cos^2 u)(\Delta + \alpha \cos^2 u)}}{\kappa - \alpha \cos^2 u}, \\ \frac{d\tilde{v}}{d\tau} &= \frac{1}{\Phi_v(\tilde{v})} = \frac{\sqrt{(\alpha + \Delta + (1 - \Delta) \cos^2 \tilde{v})(\mu + \Delta + (1 - \Delta) \cos^2 \tilde{v})(\Delta + (1 - \Delta) \cos^2 \tilde{v})}}{\kappa + \Delta + (1 - \Delta) \cos^2 \tilde{v}},\end{aligned}\quad (5.1)$$

при этом скорость точки контакта в «поперечном» направлении представляется в форме

$$\begin{aligned}\frac{dy}{d\tau} = \tilde{V}_y(u, \tilde{v}) &= A(\alpha \cos^2 u + (1 - \Delta) \cos^2 \tilde{v} + \Delta) \frac{\sqrt{\alpha \cos^2 u + \Delta} \cos \tilde{v}}{(\kappa - \alpha \cos^2 u)(\kappa + \Delta + (1 - \Delta) \cos^2 \tilde{v})}, \\ A &= b(\mu - \kappa) \sqrt{\frac{1 - \Delta}{\mu + \Delta}}.\end{aligned}\quad (5.2)$$

При  $M_\gamma \neq 0$  уравнения для аналогичного семейства торов приводятся к такой же форме путем дополнительной замены времени (см. раздел 3.2). В случае  $-\alpha < \Delta < 0$  для приведения уравнений движения к подобной форме на торе требуется вместо  $v$  выполнить замену переменной  $u$  следующего вида:

$$\cos \tilde{u} = \sqrt{\frac{\alpha \cos^2 u + \Delta}{\alpha + \Delta}}, \quad \text{при } \dot{u} > 0, \quad \cos \tilde{u} = -\sqrt{\frac{\alpha \cos^2 u + \Delta}{\alpha + \Delta}}, \quad \text{при } \dot{u} < 0. \quad (5.3)$$

Поток (5.1) приводится к прямолинейной обмотке тора

$$\frac{d\varphi_u}{d\tau} = \omega_u = \frac{2\pi}{T_u}, \quad \frac{d\varphi_v}{d\tau} = \omega_v = \frac{2\pi}{T_v}$$

следующей заменой  $(u, \tilde{v}) \rightarrow (\varphi_u, \varphi_v)$ :

$$\varphi_u = \frac{2\pi}{T_u} \int_0^u \Phi_u(x) dx, \quad \varphi_v = \frac{2\pi}{T_v} \int_0^{\tilde{v}} \Phi_v(x) dx,$$

где периоды  $T_u, T_v$  определяются соотношениями

$$T_u = \int_{-\pi}^{\pi} \Phi_u(x) dx, \quad T_v = \int_{-\pi}^{\pi} \Phi_v(x) dx. \quad (5.4)$$

Необходимые известные аналитические результаты по анализу поведения функции  $y(\tau)$  для различных траекторий на торе приведены в приложении.

### 5.1. Отображение Пуанкаре

Для численного исследования и визуализации функции  $y(\tau)$  воспользуемся методом построения отображения Пуанкаре. Рассмотрим фазовый поток, задаваемый соотношениями (5.1), (5.2) на трехмерном многообразии  $\mathbb{T}^2 \times \mathbb{R} = \{(u, \tilde{v}, y)\}$ . Выберем в качестве секущей

поверхность  $\tilde{v} = 0$ , представляющую собой цилиндр  $\mathbb{S}' \times \mathbb{R} = \{(u, y)\}$ . На этом цилиндре фазовый поток (5.1), (5.2) индуцирует отображение Пуанкаре

$$\pi: \mathbb{S}' \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}' \times \mathbb{R}, \quad (5.5)$$

которое можно определить следующим образом:  $\pi(u_0, y_0) = (u(\tau^*), y(\tau^*))$ , где  $\tau^*$  — минимальный корень уравнения  $\tilde{v}(\tau^*) = 0$  для траектории системы (5.1) с начальными условиями  $\tilde{v}(0) = 0$ ,  $u(0) = u_0$ . Из (5.1) следует, что при  $0 < \Delta < 1$  для всех  $u$ ,  $\tilde{v}$  выполнено неравенство  $\frac{d\tilde{v}}{d\tau} > 0$ . Следовательно, выбранная поверхность сечения всюду трансверсальна потоку (5.1), а отображение (5.5) является глобальным и полностью отражает динамику системы.

Остановимся подробнее на свойствах отображения (5.5). Траектория шара не зависит от выбора начала координат; следовательно, отображение (5.5) обладает трансляционной симметрией в направлении  $y$ , то есть

$$\pi(u_0, y_0 + \Delta y) = \pi(u_0, y_0) + (0, \Delta y). \quad (5.6)$$

Таким образом, для полного исследования отображения (5.5) достаточно построить траектории с начальными условиями, лежащими на одной прямой, например,  $y_0 = 0$ . Все остальные траектории будут получаться из данных с помощью сдвига вдоль оси  $Oy$ . Очевидно, что из неограниченности отображения Пуанкаре следует неограниченность качения шара вдоль направления  $Oy$ . Характер же этой неограниченности (линейность либо нелинейность среднего движения) можно качественно определить с помощью вида отображения. Примеры отображений Пуанкаре при различных значениях интеграла  $\Delta$  приведены на рисунке 9 и будут описаны ниже.

## 5.2. Поперечное движение для нерезонансных торов

Как известно (см. приложение), если тор нерезонансный (то есть  $T_u/T_v \notin \mathbb{Q}$ ), то

$$y(\tau) = \langle \tilde{V}_y \rangle \tau + \delta y(\tau),$$

где  $\langle \tilde{V}_y \rangle$  — средняя по инвариантному тору скорость (5.2), которая может быть найдена как

$$\langle \tilde{V}_y \rangle = \frac{\int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} V_y(u, \tilde{v}) \Phi_u(u) \Phi_v(\tilde{v}) du d\tilde{v}}{T_u T_v}, \quad (5.7)$$

а остаток удовлетворяет равенству

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{\delta y(\tau)}{\tau} = 0.$$

При этом в исходном времени  $t$  средняя скорость отличается от  $\langle \tilde{V}_y \rangle$  лишь на постоянный множитель (см. приложение).

Покажем, что для шара Чаплыгина среднее движение в поперечном направлении отсутствует.

**Предложение 1.** Пусть  $M_\gamma = 0$  и  $0 < \Delta < 1$ , тогда

$$\langle \tilde{V}_y \rangle = 0.$$

*Доказательство.* Согласно (5.1), (5.2), подынтегральная функция в (5.7) периодическая по  $u$ ,  $\tilde{v}$  с периодом  $2\pi$  и меняет знак при преобразовании  $\tilde{v} \rightarrow \tilde{v} + \pi$ ; следовательно, в рассматриваемой области интеграл (5.5) обращается в нуль. ■

Аналогичным образом (используя замены (3.6) и (5.3)) можно доказать равенство нулю средней скорости при  $-\alpha < \Delta < 0$  и при  $M_\gamma \neq 0$ .

Таким образом, если через начальную точку контакта на плоскости провести прямую, перпендикулярную проекции момента  $\mathbf{M}$ , то, согласно теореме о возвращении (см. приложение), шар не может все время удаляться от этой прямой — он обязательно вернется к ней сколь угодно близко. Если, кроме того, в начальный момент  $\tilde{V}_y \neq 0$ , то след точки контакта сколь угодно много раз пересечет эту прямую (см. рис. 11а).

После замены времени  $t \rightarrow \tau$ , предложенной выше, функция  $y(\tau) = \delta y(\tau)$  может быть представлена в виде формального ряда

$$y(\tau) = \sum_{n_1, n_2} \frac{V_{n_1 n_2}}{i(\omega_u n_1 + \omega_v n_2)} e^{i(\omega_u n_1 + \omega_v n_2)\tau}, \quad n_1, n_2 \in \mathbb{Z}, \quad (5.8)$$

где  $V_{n_1 n_2}$  — коэффициенты фурье-разложения скорости  $V_y(\varphi_u, \varphi_v)$ .

Этот ряд сходится абсолютно и равномерно при  $\tau \in (-\infty, +\infty)$  для почти всех чисел вращения  $r = \frac{\omega_u}{\omega_v}$ , при этом  $y(\tau)$  — квазипериодическая функция. В этом случае отображение Пуанкаре представляет собой семейство ограниченных по  $y$  кривых, всюду плотно заполненных точками траекторий (см. рис. 9а). Как следует из описанной выше трансляционной симметрии отображения, кривые переходят друг в друга параллельным переносом вдоль оси  $Oy$ . На рисунке видно, что сверху и снизу вся совокупность траекторий ограничена кривыми, которые только касаются прямой  $y = y_0$  (но не пересекают ее), то есть для соответствующих решений разность  $y - y_0$  либо неотрицательна, либо неположительна для всех  $t$  (см. приложение, теорема 2).

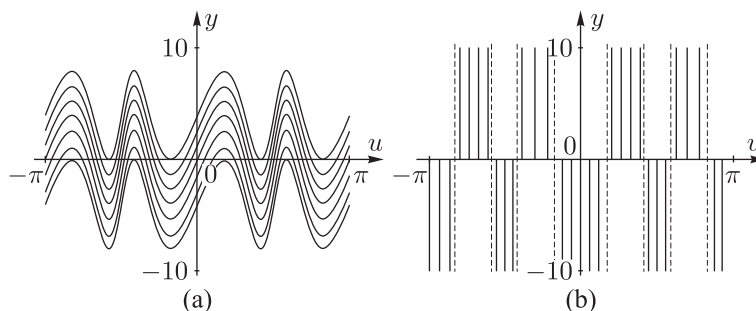


Рис. 9. Сечение Пуанкаре потока  $(\dot{u}, \dot{\tilde{v}}, \dot{y})$  плоскостью  $v = 0$  при  $I_1 = 0.8$ ,  $I_2 = 0.5$ ,  $I_3 = 0.35$ ,  $\varepsilon = 4$ ,  $M_\gamma = 0$ ,  $y(t = 0) = 0$ : (а)  $\Delta = 0.92365$ , (б)  $\Delta = 0.92445$  ( $T_u/T_v = 4/3$ ).

Если ряд (5.8) сходится абсолютно, но неравномерно при  $\tau \in (-\infty, +\infty)$ , то  $y(\tau)$  не является ограниченной функцией. При этом шар может либо укатиться сколь угодно далеко



в направлении  $Oy$ , либо сколь угодно много раз пересечь прямую  $y = y_0$ . В ходе компьютерных экспериментов подобного поведения обнаружить не удастся. Это может быть обусловлено одной из следующих причин:

- а) ряд (5.8) для рассматриваемой системы всегда сходится (доказательство этого факта является отдельной задачей математического анализа);
- б) множество чисел вращения, при которых наблюдается подобное поведение, имеет нулевую меру Лебега (см. приложение).

Заметим, что дискуссия о значении и физическом смысле данных результатов для астрономических наблюдений началась, по сути, с момента их обнаружения К. Брунсом (1884) [27] и Г. Гильденом (1888) [31] (см. подробнее [28]). По-видимому, наиболее естественная трактовка была дана К. Шарлье: на любом конечном интервале времени наблюдений неравномерность сходимости ни на что не влияет, если с увеличением интервала времени соответствующим образом увеличивать число учитываемых членов ряда (5.8). Так что на практике (в том числе при численном моделировании) эти эффекты фактически не играют никакой роли, гораздо большее влияние на результаты наблюдений оказывают (крупные) резонансы.

### 5.3. Поперечное движение в случае резонансных торов

Если тор резонансный (то есть  $T_u/T_v \in \mathbb{Q}$ ), то все траектории на нем — замкнутые, а функции  $u(\tau)$ ,  $\tilde{v}(\tau)$  — периодические с периодом  $T = mT_u = nT_v$ , где  $m, n$  — некоторые целые числа. Обозначая через  $\psi_0 = (u, \tilde{v})$  начальную точку траектории на торе, для поперечного движения имеем  $y(\tau) = \langle \tilde{V}_y \rangle_{\psi_0} \tau + \delta y_{\psi_0}(\tau)$ , где в данном случае  $\langle \tilde{V}_y \rangle_{\psi_0}$  есть среднее по заданной траектории,

$$\langle \tilde{V}_y \rangle_{\psi_0} = \frac{1}{T} \int_0^T \tilde{V}_y(u_{\psi_0}(\tau), \tilde{v}_{\psi_0}(\tau)) d\tau,$$

а остаток — периодическая функция с тем же периодом,

$$\delta y_{\psi_0}(\tau) = \delta y_{\psi_0}(\tau + T).$$

Даже несмотря на то, что среднее по всему тору  $\langle \tilde{V}_y \rangle$  равно нулю, на резонансном торе в общем случае среднее по траектории  $\langle \tilde{V}_y \rangle_{\psi_0}$  — непостоянная функция, отличная от нуля.

Укажем те резонансные торы, для которых среднее движение (вследствие симметрии) заведомо отсутствует:  $\langle \tilde{V}_y \rangle_{\psi_0} \equiv 0$ .

**Предложение 2.** Среднее по любой траектории на резонансном торе тождественно обращается в нуль (то есть  $\langle \tilde{V}_y \rangle_{\psi_0} \equiv 0$ ), если

- $\frac{T_u}{T_v} = \frac{2p+1}{q}$  при  $0 < \Delta < 1$ ,
- $\frac{T_u}{T_v} = \frac{p}{2q+1}$  при  $-\alpha < \Delta < 0$ ,

где  $p, q$  — некоторые целые числа.

*Доказательство.* Рассмотрим подробно случай  $M_\gamma = 0$ ,  $0 < \Delta < 1$  (во всех остальных случаях можно доказать аналогично, используя замену (3.6) и альтернативную параметризацию сферы Пуассона, см. п. 3.1). Уравнения для траектории на торе (5.1) инвариантны относительно преобразований

$$R_u: (u, \tilde{v}) \rightarrow (u + \pi, \tilde{v}), \quad R_v: (u, \tilde{v}) \rightarrow (u, \tilde{v} + \pi).$$

С другой стороны, скорость (5.2) поперечного ухода  $\tilde{V}_y$  сохраняется лишь при отображении  $R_u$ , а при  $R_v$  и  $R_u \circ R_v$  — меняет знак. Следовательно, те периодические траектории, которые переходят в себя при преобразованиях  $R_v$  и  $R_u \circ R_v$ , приводят к нулевому среднему:

$$\langle \tilde{V}_y \rangle_\gamma = \frac{1}{T} \int_\gamma \tilde{V}_y(u(\tau), \tilde{v}(\tau)) d\tau_n = 0.$$

Согласно (5.1) и (5.4), функции  $u(\tau)$ ,  $\tilde{v}(\tau)$  удовлетворяют соотношениям

$$\begin{aligned} u(\tau + mT_u) &= u(\tau), & u(\tau + (m + \frac{1}{2})T_u) &= u + \pi, \\ \tilde{v}(\tau + nT_v) &= \tilde{v}(\tau), & \tilde{v}(\tau + (n + \frac{1}{2})T_v) &= \tilde{v} + \pi, \end{aligned}$$

где  $m, n$  — произвольные целые.

Таким образом, если  $mT_u = (n + \frac{1}{2})T_v$  либо  $(m + \frac{1}{2})T_u = (n + \frac{1}{2})T_v$ , то подходящий сдвиг по времени эквивалентен преобразованию  $R_v$  и  $R_u \circ R_v$  соответственно. Следовательно, для данных резонансных торов  $\langle \tilde{V}_y \rangle_\gamma \equiv 0$ . ■

В случае резонансных торов, удовлетворяющих условиям предложения 2, все траектории отображения Пуанкаре представляют собой неподвижные точки порядка  $n$  (при  $T_u/T_v = n/m$ ), и среднее движение отсутствует.

Для резонансных торов, не удовлетворяющих условиям предложения 2, будет наблюдаться ненулевое среднее движение, причем его скорость и направление зависят не только от тора, но и от положения траектории на торе (от взаимного расположения траектории и области  $y(u, \tilde{v}) > 0$ ). Для визуализации данного движения параметризуем траектории на торе начальной координатой  $u_0 = u(\tau)|_{\tau=0}$  на плоскости сечения Пуанкаре  $\tilde{v} = 0$  (это всегда можно сделать, так как поток (5.1) всюду трансверсален плоскости  $\tilde{v} = 0$  при  $0 < \Delta < 1$ ). Построим график величины дрейфа за один период движения по тору  $\Delta y = y(t + T) - y(t)$  в зависимости от  $u_0$ . Пример такого графика для  $T_u/T_v = 4/3$  приведен на рисунке 10. В силу симметрии  $\tilde{V}_y(u, \tilde{v} + \pi) = -\tilde{V}_y(u, \tilde{v})$ , каждой траектории с положительным средним движением соответствует траектория с точно таким же средним движением в отрицательном направлении, что хорошо видно на рисунке 11b. При этом траектории отображения Пуанкаре

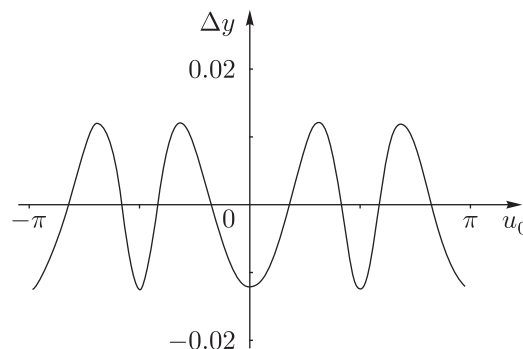


Рис. 10. Зависимость величины дрейфа за один период движения по резонансному тору с числом вращений  $T_u/T_v = 4/3$ .

с начальными условиями, лежащими на прямой  $y_0 = 0$ , представляют собой  $n$  вертикальных прямых (при  $T_u/T_v = n/m$ ), заполненных точками, расположенными на расстояниях  $\Delta y(u_0)$  друг от друга (см. рис. 9b). В зависимости от знака  $\Delta y$  вертикальные прямые заполняются в положительном либо отрицательном направлении по оси  $Oy$  (см. рис. 9b).

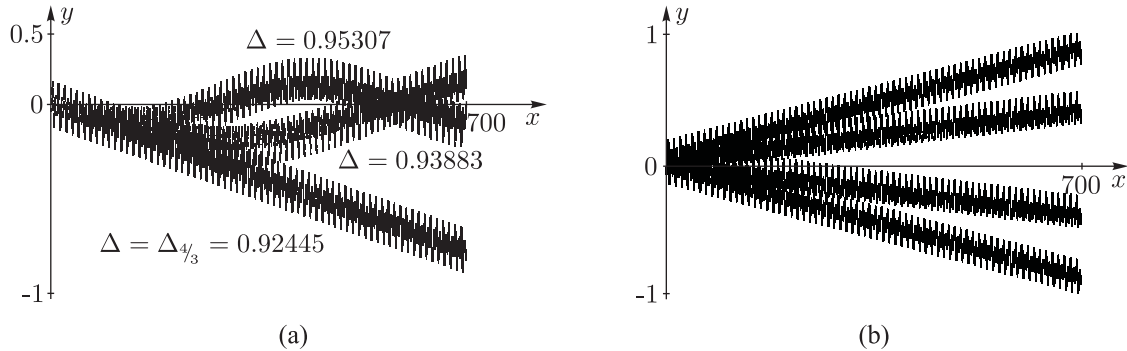


Рис. 11. Траектории точки контакта при  $I_1 = 0.8$ ,  $I_2 = 0.5$ ,  $I_3 = 0.35$ ,  $\mathcal{D} = 1$ ,  $\varepsilon = 4$ ,  $M_\gamma = 0$ : (a) при различных значениях  $\Delta$ , близких к резонансному, и (b) при различных начальных условиях на резонансном торе  $\Delta = 0.92445$  ( $T_u/T_v = 4/3$ ).

**ЗАМЕЧАНИЕ.** Отметим, что скорость среднего движения вдоль оси  $Oy$  даже для наиболее крупных резонансов, таких как  $T_u/T_v = 4/3$ , на два порядка меньше скорости движения вдоль оси  $Ox$  (см. рис. 11). Таким образом, экспериментальное обнаружение данного эффекта с помощью непосредственного измерения представляет собой достаточно сложную задачу (хотя бы из-за наличия трения).

С точки зрения практического наблюдения среднего движения на компьютере, корректно также ставить вопрос о ненулевом среднем движении на конечных, хотя и достаточно больших временах. В этом случае областью существования среднего ухода следует считать не только указанные выше резонансные торы, но и их малые окрестности. Можно показать (например, методами усреднения), что для любого достаточно большого  $t^* < \infty$  существует окрестность резонансного тора, в которой траектории точки контакта мало отличаются от резонансных на временах порядка  $t^*$ . Примеры траекторий точки контакта для торов, близких к резонансному, приведены на рисунке 11a.

## 6. Случай динамической симметрии ( $I_1 = I_2$ )

Если два главных момента инерции совпадают,  $I_1 = I_2$ , например, в случае осесимметричного распределения масс, уравнения движения существенно упрощаются, при этом приведенная система допускает два линейных по моментам интеграла. Первый — интеграл площадей  $(M, \gamma)$ , а второй — интеграл, являющийся частным случаем интеграла, найденного С. А. Чаплыгиным в задаче о качении осесимметричного тела по абсолютно шероховатой плоскости [22], и имеющий вид

$$F_0 = \frac{\omega_3}{\rho} = \rho(\mathcal{D}\gamma_3(M_1\gamma_1 + M_2\gamma_2) + (I_1 + \mathcal{D}\gamma_3^2)M_3), \quad (6.1)$$

где  $\rho = (I_1(I_3 + \mathcal{D}) + \mathcal{D}(I_3 - I_1)\gamma_3^2)^{-1/2}$  — плотность инвариантной меры.

ЗАМЕЧАНИЕ. Интеграл квадрата момента  $F_4 = (\mathbf{M}, \mathbf{M})$  (см. (2.2)) выражается через интеграл энергии  $E$  и линейные интегралы  $F_0, F_1, (\mathbf{M}, \boldsymbol{\gamma})$  следующим образом:

$$F_4 = (I_1 + \mathcal{D})E - \frac{\mathcal{D}}{I_1}F_1^2 + \frac{I_3 - I_1}{I_1}F_0^2.$$

На уровне первых интегралов

$$E = \mathcal{E}, \quad F_0 = f, \quad F_1 = M_\gamma$$

система (1.3) может быть сведена к единственному уравнению, определяющему эволюцию  $\gamma_3(t)$ :

$$(I_1 + \mathcal{D})\dot{\gamma}_3^2 = (1 - \gamma_3^2)\mathcal{E} - \frac{1}{I_1^2(I_1 + \mathcal{D}\gamma_3^2)} \left( \left( M_\gamma(I_1 + \mathcal{D}\gamma_3^2) - \frac{f\gamma_3}{\rho} \right)^2 + I_1^2 f^2 (1 - \gamma_3^2) \right). \quad (6.2)$$

### 6.1. Случай $\mathbf{M} \nparallel \boldsymbol{\gamma}$

В этом случае скорость точки контакта представляется в виде

$$\dot{x} = \frac{b}{\sqrt{\mathcal{C} - M_\gamma^2}} \left( \mathcal{E} - \frac{M_\gamma}{I_1} (M_\gamma + (I_1 - I_3)f\rho\gamma_3) \right), \quad \dot{y} = \frac{b(I_1 - I_3)f}{\sqrt{\mathcal{C} - M_\gamma^2}} \rho\dot{\gamma}_3. \quad (6.3)$$

Определенные таким образом скорости  $\dot{x}, \dot{y}$  зависят лишь от констант первых интегралов  $\gamma_3$  и  $\dot{\gamma}_3$ : следовательно, в данном случае они являются функциями на инвариантной кривой, заданной уравнением (6.2) (а не на торе).

Решения уравнения (6.2) являются периодическими (с периодом  $T$ ) функциями времени и обладают симметрией  $\gamma_3(t) = \gamma_3(-t)$ ,  $\dot{\gamma}_3(t) = -\dot{\gamma}_3(-t)$ . Используя данную симметрию, нетрудно показать, что  $y(t)$  также является периодической:  $y(t) = y(t + T)$ ; таким образом,

*поперечный дрейф в рассматриваемом случае отсутствует.*

Для анализа дрейфа в главном направлении (вдоль оси  $Ox$ ) заметим, что  $\dot{x}(t)$ , согласно (6.3) и (6.2), является периодической функцией, поэтому дрейф характеризуется смещением шара вдоль оси  $Ox$  за один период приведенной системы (6.2). Величину данного смещения можно представить в виде интеграла

$$\Delta x = x(T) - x(0) = k \int_{\gamma_3^{\min}}^{\gamma_3^{\max}} \frac{(ie - M_\gamma^2 + jM_\gamma f \tilde{\rho} \gamma_3) d\gamma_3}{\sqrt{i(ie - M_\gamma^2 - f^2) - (i^2 e + M_\gamma^2 + jf^2)\gamma_3^2 + 2M_\gamma f \gamma_3 / \tilde{\rho}}}, \quad (6.4)$$

где введены обозначения

$$k = \frac{2b\sqrt{i+1}}{\sqrt{\mathcal{C} - M_\gamma^2}}, \quad \tilde{\rho} = \mathcal{D}\rho = (i(i+j+1) + j\gamma_3^2)^{-1/2}, \quad e = \mathcal{D}\mathcal{E}, \quad i = \frac{I_1}{\mathcal{D}}, \quad j = \frac{I_3 - I_1}{\mathcal{D}},$$

а значения  $\gamma_3^{\min}$  и  $\gamma_3^{\max}$  являются минимальным и максимальным решениями уравнения  $\dot{\gamma}_3(\gamma_3) = 0$ .

Отметим, что даже без вычисления интеграла (6.4) по аналогии с общим случаем (см. раздел 4) в пространстве первых интегралов системы можно выделить область положительно-

определенного продольного дрейфа. На рисунке 12 приведена соответствующая бифуркационная диаграмма на плоскости интегралов  $h$  и  $g$  (см. (2.3)) с отмеченной на ней областью положительно-определенного дрейфа. Примеры траекторий точки контакта, соответствующих различным областям диаграммы, приведены на рисунке 13. Компьютерные эксперименты показывают, что при  $\mathbf{M} \nparallel \gamma$  дрейф всегда существует ( $\Delta x > 0$ ), тем не менее точное доказательство этого факта требует дополнительного исследования квадратуры (6.4).

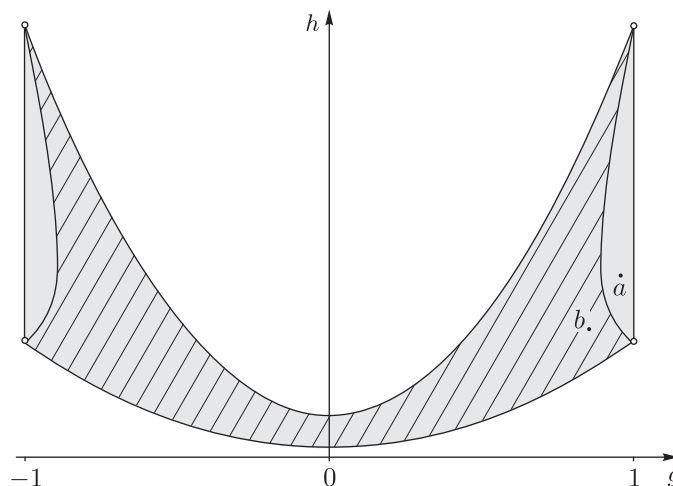


Рис. 12. Область положительно-определенного дрейфа на плоскости первых интегралов (выделена наклонной штриховкой) при  $I_1 = I_2 = 3$ ,  $I_3 = 1$ ,  $\mathcal{D} = 5$ .

**ЗАМЕЧАНИЕ.** Интересно, что при качении шара петли возникают не только на траектории точки контакта на плоскости, но и на траектории точки контакта на самом шаре. При этом существованию петель у траектории на плоскости соответствует их отсутствие на шаре, и наоборот. Примеры таких траекторий приведены на рисунке 13. Отметим также, что траектории точки контакта на шаре совпадают с траекториями системы на сфере Пуассона.

## 6.2. Случай $\mathbf{M} \parallel \gamma$

Как было сказано выше (см. раздел 2), в случае  $\mathbf{M} \parallel \gamma$  уравнения движения шара эквивалентны уравнениям случая Эйлера в динамике твердого тела. При этом осесимметричному распределению масс соответствует случай Эйлера – Лагранжа, интегрирование которого может быть проведено в элементарных функциях. Общими движениями в этом случае являются регулярные прецессии с постоянным углом нутации,  $\theta = \text{const}$ , и постоянными угловыми скоростями собственного вращения и прецессии,  $\dot{\varphi} = \text{const}$ ,  $\dot{\psi} = \text{const}$ . Выразив орты  $\alpha$  и  $\gamma$  в зависимости от времени и подставив получившиеся выражения в квадратуры для точки контакта (2.8), получим, что в рассматриваемом случае шар катится по окружности радиуса

$$R = b \frac{I_1 - I_3}{I_3 + \mathcal{D}} \gamma_3 \sqrt{1 - \gamma_3^2} = \frac{b}{2\mathcal{D}H + M_\gamma} \sqrt{\frac{I_1 + \mathcal{D}}{I_3 + \mathcal{D}}} (2I_1H - M_\gamma^2)(M_\gamma^2 - 2I_3H).$$

Таким образом, движение шара с осесимметричным распределением масс в случае  $\mathbf{M} \parallel \gamma$  является ограниченным. Для доказательства ограниченности траекторий в случае  $\mathbf{M} \parallel \gamma$

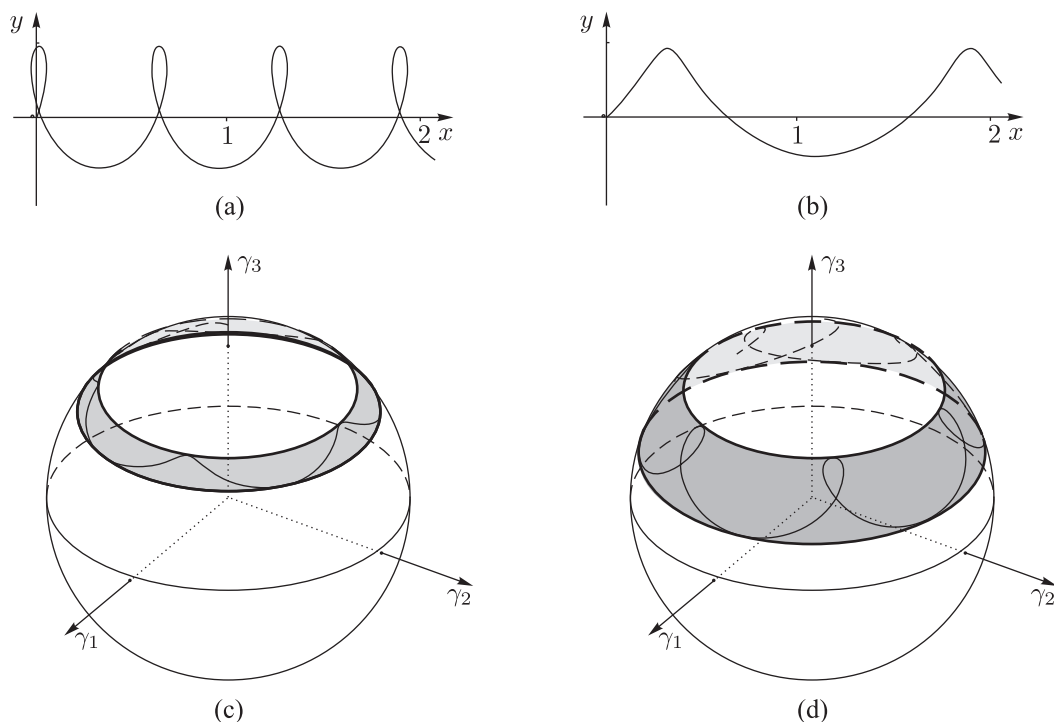


Рис. 13. Траектории точки контакта на плоскости и шаре: (а) и (с) соответствующие точке  $a$  на рисунке 12, (b) и (d) — точке  $b$  на рисунке 12.

для произвольных моментов инерции необходимо исследовать квадратуры (2.8), зависящие от эллиптических функций, являющихся решением уравнений для случая Эйлера (2.7).

## Заключение

В заключение укажем основные результаты, полученные в данной работе:

- построена область положительно-определенного продольного дрейфа в пространстве первых интегралов приведенной системы,
- доказано отсутствие поперечного дрейфа для нерезонансных торов приведенной системы (возможно, за исключением множества торов нулевой меры) и для резонансных торов, удовлетворяющих условиям предложения 2,
- для шара Чаплыгина с осесимметричным распределением масс доказаны отсутствие поперечного дрейфа, а также ограниченность движения в случае  $\mathbf{M} \parallel \boldsymbol{\gamma}$ .

Среди нерешенных проблем в рассматриваемой задаче отметим следующие:

1. доказательство гипотезы об ограниченности движения шара в случае  $\mathbf{M} \parallel \boldsymbol{\gamma}$  для произвольных моментов инерции,
2. доказательство положительности продольного дрейфа вне области положительной определенности скорости  $V_x$  (см. рис. 7),
3. вычисление величины продольного дрейфа в зависимости от значений первых интегралов системы,

4. доказательство того, что для резонансных торов, не удовлетворяющих условиям предложения 2, всегда существует поперечный дрейф (то есть доказательство достаточности условий предложения 2),
5. доказательство существования либо несуществования нерезонансных торов с неограниченной амплитудой колебаний по оси  $Oy$  (то есть доказательство неравномерной сходимости ряда Фурье для координаты  $y$ ).

## Приложение

Пусть на двумерном торе в некоторых угловых переменных  $\psi_1, \psi_2 \bmod 2\pi$  задан поток без неподвижных точек

$$\dot{\psi}_1 = \Psi_1(\psi_1, \psi_2), \quad \dot{\psi}_2 = \Psi_2(\psi_1, \psi_2), \quad (A.1)$$

где  $\Psi_1, \Psi_2$  — периодические по  $\psi_1, \psi_2$  функции, в нашем случае — аналитические; будем полагать, что поток сохраняет инвариантную меру с аналитической плотностью  $\rho(\psi_1, \psi_2)$ . Всюду в этом разделе двумерные векторы будем обозначать полужирным шрифтом:  $\psi = (\psi_1, \psi_2)$ ,  $\Psi = (\Psi_1, \Psi_2)$ , и так далее.

Для различных траекторий на торе  $\psi = \psi(t, \psi_0)$ , где  $\psi_0$  — начальные условия. Рассмотрим вопрос о поведении функции

$$X_{\psi_0}(T) = \int_0^T V(\psi(t, \psi_0)) dt,$$

где  $V(\psi)$  — некоторая достаточно гладкая (в нашем случае аналитическая) функция на торе. Другими словами, можно сказать, что требуется исследовать поведение трехмерной системы

$$\dot{\psi}_1 = \Psi_1(\psi), \quad \dot{\psi}_2 = \Psi_2(\psi), \quad \dot{X} = V(\psi), \quad (A.2)$$

в которой последнее уравнение не зависит от  $X$  и также обладает инвариантной мерой  $\rho(\psi)$ .

Согласно теореме Колмогорова [17], если функции  $\Psi_i$  аналитические, то существует аналитическая замена переменных на торе  $\psi \rightarrow \varphi$ , которая приводит поток (A.1) к стандартному

$$\dot{\varphi}_1 = \frac{\omega_1}{F(\varphi)}, \quad \dot{\varphi}_2 = \frac{\omega_2}{F(\varphi)}, \quad \omega_i = \text{const}, \quad (A.3)$$

где  $F(\varphi)$  — плотность инвариантной меры, выраженная в новых переменных.

Отсюда, в частности, следует, что если  $\omega_1/\omega_2 \in \mathbb{Q}$ , то число вращения является рациональным, то все траектории на торе периодические, а если  $\omega_1/\omega_2 \notin \mathbb{Q}$ , то все траектории — незамкнутые всюду плотные обмотки тора.

**ЗАМЕЧАНИЕ.** Условия периодичности и эргодичности траекторий потока с инвариантной мерой на торе были установлены в работе [33] (опубликованной раньше работы [17]). Они естественным образом выражаются через средние от компонент исходного векторного поля (A.1)

$$\langle \Psi_i \rangle = \frac{\int \Psi_i(\psi) \rho(\psi) d\psi_1 d\psi_2}{\int \rho(\psi) d\psi_1 d\psi_2}.$$

Так, если  $\frac{\langle \Psi_1 \rangle}{\langle \Psi_2 \rangle} \in \mathbb{Q}$ , то все траектории периодические, если  $\frac{\langle \Psi_1 \rangle}{\langle \Psi_2 \rangle} \notin \mathbb{Q}$ , то траектории всюду плотны на торе.



ЗАМЕЧАНИЕ. Динамические системы с инвариантной мерой на двумерном торе в форме (A.3) обсуждались еще А. Пуанкаре [19, гл. 16]. Полное доказательство теоремы Колмогорова для семейства инвариантных торов можно найти в [25].

Определим среднюю по тору скорость соотношением

$$\langle V \rangle = \frac{\int V(\psi) \rho(\psi) d\psi_1 d\psi_2}{\int \rho(\psi) d\psi_1 d\psi_2}. \quad (A.4)$$

Отметим одно полезное свойство среднего по тору: если умножить векторное поле (A.2) на положительную функцию  $\lambda(\psi)$  так, что требуется исследовать систему

$$\dot{\psi}_1 = \lambda(\psi) \Psi_1(\psi), \quad \dot{\psi}_2 = \lambda(\psi) \Psi_2(\psi), \quad \dot{X} = \lambda(\psi) V(\psi),$$

то, очевидно, плотность инвариантной меры окажется равной  $\rho(\psi)/\lambda(\psi)$ , и для среднего по тору получим

$$\langle V_\lambda \rangle = \Lambda \langle V \rangle, \quad \Lambda = \frac{\int \rho(\psi) d\psi_1 d\psi_2}{\int \frac{\rho(\psi)}{\lambda(\psi)} d\psi_1 d\psi_2} = \text{const},$$

где  $\langle V \rangle$  определено соотношением (A.4).

Приведем далее известные результаты о поведении функции  $X_{\psi_0}(t)$  в случае  $\omega_1/\omega_2 \notin \mathbb{Q}$ .

#### 1. Среднее движение.

**Теорема 1.** Если траектория  $\psi(t, \psi_0)$  — непериодическая, то

$$X_{\psi_0}(t) = \langle V \rangle t + \delta X_{\psi_0}(t),$$

где

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\delta X_{\psi_0}(t)}{t} = 0.$$

Таким образом, среднее движение не зависит от начальной точки, а размах колебаний в окрестности среднего может в общем случае становиться сколь угодно большим. Теорема 1 восходит к Г. Вейлю [35] (см. по этому поводу работу [15], в которой эта проблематика представлена в более общем виде).

#### 2. Колебания вблизи среднего движения.

Теперь будем полагать, что  $\langle V \rangle = 0$  (этого можно добиться, просто перейдя к функции  $V - \langle V \rangle$ ), при этом  $X_{\psi_0}(t) = \delta X_{\psi_0}(t)$ .

**Теорема 2.** Существуют  $\psi_0^-$  и  $\psi_0^+$ , такие, что

$$X_{\psi_0^-}(t) \leq 0 \quad \text{и} \quad X_{\psi_0^+}(t) \geq 0$$

для всех  $t \in \mathbb{R}$ .

Можно сказать, что эти частные решения  $X_{\psi_0^-}(t)$  и  $X_{\psi_0^+}(t)$  задают границы, внутри которых располагаются остальные решения  $X_{\psi_0}(t)$ .

**Теорема 3 (о возвращении).** Пусть  $\omega_1/\omega_2 \notin \mathbb{Q}$ . Если  $V(\psi)$  — аналитическая функция, то для всяких  $\varepsilon > 0$  и  $T_0$  существует  $t > T_0$ , такое, что  $|X_{\psi_0}(t)| < \varepsilon$ .

**Теорема 4 (о нулях).** Пусть  $\omega_1/\omega_2 \notin \mathbb{Q}$  и  $V(\psi)$  — аналитическая функция. Если  $V(\psi_0) \neq 0$ , то  $X_{\psi_0}(t)$  имеет бесконечно много нулей при  $t \rightarrow \infty$ .

Эти утверждения (даже в более общей форме) доказаны в [15].

**Теорема 5 ([24]).** Пусть  $\dot{\psi}_1 = \omega_1$ ,  $\dot{\psi}_2 = \omega_2$ ,  $\omega_1/\omega_2 \notin \mathbb{Q}$ , тогда  $\delta X_{\psi_0}(t)$  является квазипериодической тогда и только тогда, когда  $\delta X_{\psi_0}(t)$  является ограниченной.

Если поток на торе приведен к стандартному виду (A.3) и  $\frac{\omega_1}{\omega_2} \notin \mathbb{Q}$ , то, делая замену времени  $\frac{dt}{F(\varphi)} = d\tau$  и разлагая функцию  $V(\varphi)$  в сходящийся ряд Фурье

$$V(\varphi) = \sum_n V_n e^{i(\varphi, n)}, \quad n = (n_1, n_2) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z},$$

мы можем представить квадратуру для  $X(t)$  в виде формального ряда Фурье

$$X(\tau) = \sum_n \frac{V_n}{i(\omega, n)} e^{i(\omega, n)\tau}. \quad (A.5)$$

В общем случае в зависимости от числа вращения  $\omega_1/\omega_2 \notin \mathbb{Q}$  возможны два варианта [28, 36].

1. Ряд (A.5) сходится абсолютно и равномерно при  $-\infty < \tau < \infty$  к ограниченной квазипериодической функции. Это происходит при почти всех значениях числа вращения.
2. Ряд (A.5) сходится абсолютно, но неравномерно при  $-\infty < \tau < \infty$  и может не являться ни ограниченной, ни квазипериодической функцией. В общем случае множество соответствующих чисел вращения, с одной стороны, принадлежит ко второй категории в смысле Бэра — то есть имеет мощность континуума и содержит несчетное множество точек в любом промежутке изменения числа вращения сколь угодно малой длины, а с другой стороны — имеет нулевую меру Лебега.

Соответствующие числа вращения определяются из условий сходимости ряда

$$\sum_n \frac{|V_n|}{(\omega, n)^2}.$$

Те значения  $\omega_1/\omega_2$ , для которых ряд сходится, отвечают равномерной сходимости, в то время как точки расходимости — неравномерной.

## Список литературы

- [1] Бобылев Д. К. О шаре с гироскопом внутри, катящемся по горизонтальной плоскости без скольжения // Матем. сб., 1882, т. 16, № 3, с. 544–581.
- [2] Болсинов А. В., Борисов А. В., Мамаев И. С. Топология и устойчивость интегрируемых систем // УМН, 2010, т. 65, вып. 2(392), с. 71–132.

- [3] Борисов А. В., Килин А. А., Мамаев И. С. Как управлять шаром Чаплыгина при помощи роторов // Нелинейная динамика, 2012, т. 8, № 2, с. 289–307. (*См. также:* Borisov A. V., Kilin A. A., Mamaev I. S. How to control Chaplygin's sphere using rotors // Regul. Chaotic Dyn., 2012, vol. 17, nos. 3–4, pp. 258–272.)
- [4] Борисов А. В., Килин А. А., Мамаев И. С. Как управлять шаром Чаплыгина при помощи роторов: II // Нелинейная динамика, 2013, т. 9, № 1, с. 59–76. (*См. также:* Borisov A. V., Kilin A. A., Mamaev I. S. How to control Chaplygin's sphere using rotors. II // Regul. Chaotic Dyn., 2013, vol. 18, nos. 1–2, pp. 144–158.)
- [5] Борисов А. В., Мамаев И. С. Гамильтоновость задачи Чаплыгина о качении шара // Матем. заметки, 2001, т. 70, № 5, с. 793–795.
- [6] Борисов А. В., Мамаев И. С. Динамика твердого тела: Гамильтоновы методы, интегрируемость, хаос. Москва–Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2005. 576 с.
- [7] Борисов А. В., Мамаев И. С. Законы сохранения, иерархия динамики и явное интегрирование неголономных систем // Нелинейная динамика, 2008, т. 4, № 3, с. 223–280. (*См. также:* Borisov A. V., Mamaev I. S. Conservation laws, hierarchy of dynamics and explicit integration of nonholonomic systems // Regul. Chaotic Dyn., 2008, vol. 13, no. 5, pp. 443–490.)
- [8] Борисов А. В., Мамаев И. С., Бизяев И. А. Иерархия динамики при качении твердого тела без проскальзывания и верчения по плоскости и сфере // Нелинейная динамика, 2013, т. 9, № 2, с. 141–202. (*См. также:* Borisov A. V., Mamaev I. S., Bizyaev I. A. The hierarchy of dynamics of a rigid body rolling without slipping and spinning on a plane and a sphere // Regul. Chaotic Dyn., 2013, vol. 18, no. 3, pp. 277–328.)
- [9] Жуковский Н. Е. О гироскопическом шаре Д. К. Бобылева // Тр. отд. физ. наук Моск. об-ва любителей естествознания, антропологии и этнографии, 1893, т. 6, № 1, с. 11–17. (*См. также:* Жуковский Н. Е. О гироскопическом шаре Д. К. Бобылева // Собр. соч.: Т. 1 / Н. Е. Жуковский. Москва–Ленинград: Гостехиздат, 1948. С. 275–289.)
- [10] Козлов В. В. Динамические системы на торе с многозначными интегралами // ПММ, 1975, т. 39, № 1, с. 24–29.
- [11] Козлов В. В. О качественном анализе движения твердого тела в случае Горячева–Чаплыгина // ПММ, 1977, т. 41, № 2, с. 225–233.
- [12] Козлов В. В. К теории интегрирования уравнений неголономной механики // Успехи механики, 1985, т. 8, № 3, с. 85–107.
- [13] Козлов В. В., Колесников Н. Н. О теоремах динамики // ПММ, 1987, т. 42, № 1, с. 28–33.
- [14] Козлов В. В. Методы качественного анализа в динамике твердого тела. Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2000. 256 с.
- [15] Козлов В. В. Динамические системы на торе с многозначными интегралами // Динамические системы и оптимизация: Сб. ст.: К 70-летию со дня рождения академика Д. В. Аносова / Е. Ф. Мищенко. (Тр. МИАН им. В. А. Стеклова, т. 256.) Москва: Наука, 2007. С. 201–218.
- [16] Козлов В. В. О поведении циклических переменных в интегрируемых системах // ПММ, 2013, т. 77, № 2, с. 179–190.
- [17] Колмогоров А. Н. О динамических системах с интегральным инвариантом на торе // Докл. АН СССР, 1953, т. 93, № 5, с. 763–766.
- [18] Маркеев А. П. Об интегрируемости задачи о качении шара с многосвязной полостью, заполненной идеальной жидкостью // МТТ, 1986, т. 21, № 1, с. 64–65.
- [19] Пуанкаре А. Теория вероятностей. Ижевск: Ред. журнала «Регулярная и хаотическая динамика», 1999. 276 с. (*См. также:* Poincaré H. Calcul des probabilités. Paris: Gauthier-Villars, 1912. 333 pp.)
- [20] Цыганов А. В. О шаре Чаплыгина в абсолютном пространстве // Нелинейная динамика, 2013, т. 9, № 4, с. 711–719.
- [21] Чаплыгин С. А. О катании шара по горизонтальной плоскости // Матем. сб., 1903, т. 24, с. 139–168. (*См. также:* Чаплыгин С. А. Собр. соч.: Т. 1. Москва–Ленинград: ОГИЗ, 1948. С. 76–101.)

- [22] Чаплыгин С. А. О движении тяжелого тела вращения на горизонтальной плоскости // Исследования по динамике неголономных систем / С. А. Чаплыгин. Москва–Ленинград: Гостехиздат, 1949. С. 9–27. (См. также: Чаплыгин С. А. Собр. соч.: Т. 1. Москва–Ленинград: ОГИЗ, 1948. С. 57–75.)
- [23] Bloch A. M. Nonholonomic mechanics and control. (Interdiscip. Appl. Math., vol. 24.) New York: Springer, 2003. 483 pp.
- [24] Bohl P. Über ein in der Theorie der säkularen Störungen vorkommendes Problem // J. Reine Angew. Math., 1909, vol. 135, pp. 189–203.
- [25] Bolsinov A. V., Borisov A. V., Mamaev I. S. Hamiltonization of nonholonomic systems in the neighborhood of invariant manifolds // Regul. Chaotic Dyn., 2011, vol. 16, no. 5, pp. 443–464.
- [26] Borisov A. V., Mamaev I. S. The rolling motion of a rigid body on a plane and a sphere: Hierarchy of dynamics // Regul. Chaotic Dyn., 2002, vol. 7, no. 2, pp. 177–200. (См. также: Неголономные динамические системы: Интегрируемость, хаос, странные аттракторы: Сб. ст. / А. В. Борисов, И. С. Мамаев. Москва–Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2002. 342 с.)
- [27] Bruns K. Bemerkungen zur Theorie der allgemeinen Störungen // Astronom. Nachr., 1884, vol. 109, no. 2606, pp. 216–222.
- [28] Charlier C. V. L. Die Mechanik des Himmels: Vorlesungen. Berlin: Gruyter, 1927. 488 pp. (См. также: Шарлье К. Небесная механика. Москва: Наука, 1966. 628 с.)
- [29] Duistermaat J. J. Chaplygin's sphere, arXiv:math/0409019v1 (1 Sep 2004).
- [30] Fedorov Yu. N., Jovanović B. Nonholonomic LR systems as generalized Chaplygin systems with an invariant measure and geodesic flows on homogeneous spaces // J. Nonlinear Sci., 2004, vol. 14, no. 4, pp. 341–381.
- [31] Gylden H. Om sannolikheten af divergens hos hittills brukliga metoder att analytiskt framställa planetariska störningar // ÖfVA, 1888, vol. 45, no. 2, pp. 77–87.
- [32] Kilin A. A. The dynamics of Chaplygin ball: The qualitative and computer analysis // Regul. Chaotic Dyn., 2001, vol. 6, no. 3, pp. 291–306.
- [33] Saito T. On the measure-preserving flow on the torus // J. Math. Soc. Japan, 1951, vol. 3, no. 2, pp. 279–284.
- [34] Tsiganov A. V. Integrable Euler top and nonholonomic Chaplygin ball // J. Geom. Mech., 2011, vol. 3, no. 3, pp. 337–362.
- [35] Weyl H. Mean motion // Amer. J. Math., 1933, vol. 60, pp. 889–896. (См. также: Вейль Г. Среднее движение // УМН, 1976, т. 31, № 4, с. 213–219.)
- [36] Wintner A. The analytical foundations of celestial mechanics. Princeton: Princeton University Press, 1941. 448 pp.

## The problem of drift and recurrence for the rolling Chaplygin ball

Alexey V. Borisov<sup>1</sup>, Alexander A. Kilin<sup>2</sup>, Ivan S. Mamaev<sup>3</sup>

<sup>1,2,3</sup>Institute of Computer Science;

Laboratory of nonlinear analysis and the design of new types of vehicles

Udmurt State University

Universitetskaya 1, Izhevsk, 426034 Russia

A. A. Blagonravov Mechanical Engineering Research Institute of RAS

Bardina str. 4, Moscow, 117334, Russia

Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch of RAS

S. Kovalevskaja str. 16, Ekaterinburg, 620990, Russia

<sup>1</sup>borisov@rcd.ru, <sup>2</sup>aka@rcd.ru, <sup>3</sup>mamaev@rcd.ru

We investigate the motion of the point of contact (absolute dynamics) in the integrable problem of the Chaplygin ball rolling on a plane. Although the velocity of the point of contact is a given vector function of variables of a reduced system, it is impossible to apply standard methods of the theory of integrable Hamiltonian systems due to the absence of an appropriate conformally Hamiltonian representation for an unreduced system. For a complete analysis we apply the standard analytical approach, due to Bohl and Weyl, and develop topological methods of investigation. In this way we obtain conditions for boundedness and unboundedness of the trajectories of the contact point.

MSC 2010: 37J60, 37J35, 70E18

Keywords: nonholonomic constraint, absolute dynamics, bifurcation diagram, bifurcation complex, drift, resonance, invariant torus

Received October 4, 2013, accepted December 2, 2013

Citation: *Rus. J. Nonlin. Dyn.*, 2013, vol. 9, no. 4, pp. 721–754 (Russian)